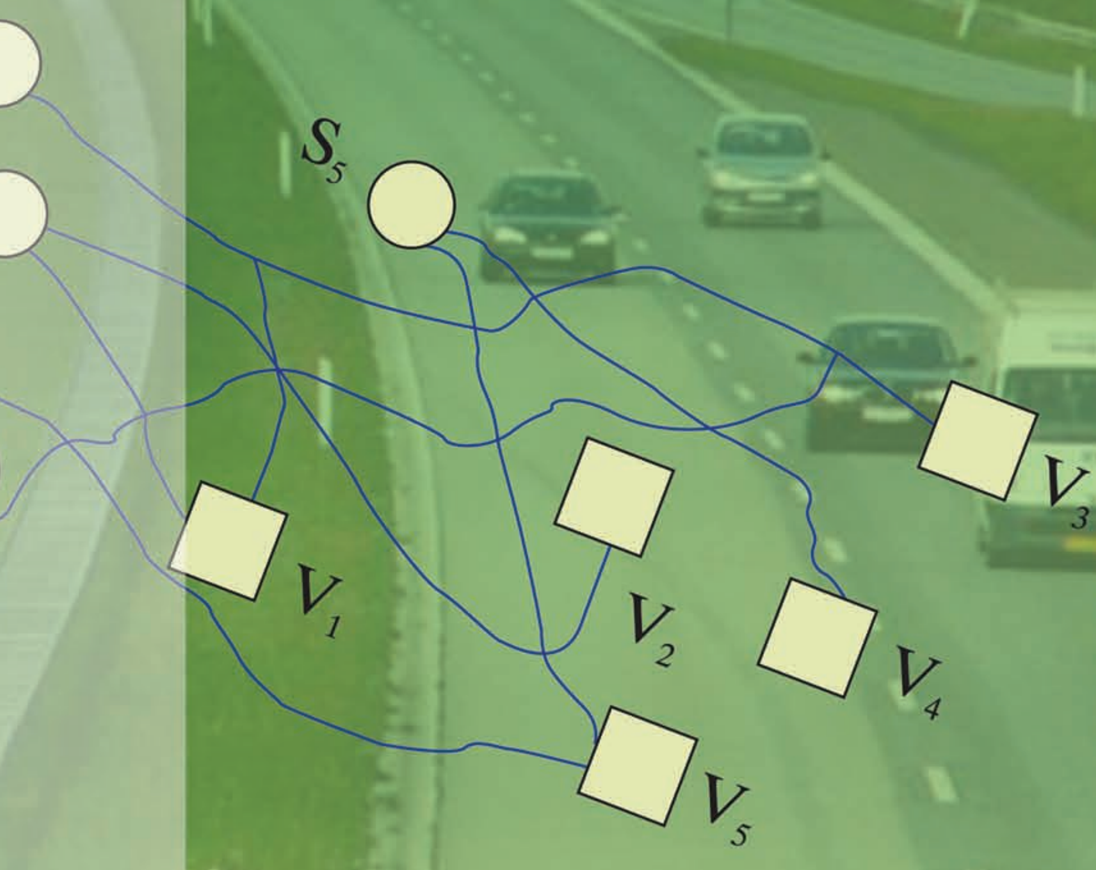
MYKOLO ROMERIO UNIVERSITETAS

Stasys PUŠKORIUS

SPRENDIMŲ PRIĖMIMO TEORIJA.

OPERACIJŲ TYRIMŲ METODAI



MYKOLO ROMERIO UNIVERSITETAS

Stasys PUŠKORIUS

SPRENDIMŲ PRIĖMIMO TEORIJA. OPERACIJŲ TYRIMŲ METODAI

Vadovėlis

Vilnius 2009

UDK 519.8(075.8)
Pu92

2008 m. lapkričio 21d., Nr. 08-428
Aukštųjų mokyklų bendrųjų vadovėlių leidybos komisijos
rekomenduota

R e c e n z a v o :

Generolo Jono Žemaičio Lietuvos karo akademijos Vadybos katedros
prof. habil. dr. **Eduardas Hendrikas Jančauskas**;

Mykolo Romerio universiteto Strateginio valdymo ir politikos fakulteto
Valdymo teorijos katedros profesorius
prof. habil. dr. **Adolfas Kaziliūnas**;

Vilniaus Gedimino technikos universiteto Verslo vadybos fakulteto
Tarptautinės ekonomikos ir vadybos katedros vedėjas
prof. habil. dr. **Borisas Melnikas**

Vadovėlis apsvarstytas Mykolo Romerio universiteto Strateginio valdymo ir politikos fakulteto Valdymo teorijos katedros 2008 m. kovo 20 d. posėdyje (protokolo Nr. 1VTK-4) ir rekomenduotas spausdinti

Vadovėlis apsvarstytas Mykolo Romerio universiteto Strateginio valdymo ir politikos fakulteto tarybos 2008 m. balandžio 3 d. posėdyje (protokolo Nr. 2SVP-6) ir rekomenduotas spausdinti

Mykolo Romerio universiteto mokslinių-mokomųjų leidinių aprobavimo spaudai komisija 2009 m. balandžio 9 d. posėdyje (protokolo Nr. 2L-3) leidinį patvirtino spausdinti

ISBN 978-9955-19-136-0

TURINYS

Pratarmė

Šis vadovėlis skirtas Lietuvos aukštųjų mokyklų studentams, studijuojantiems vadybą, viešąjį administravimą ir kitas viešojo administravimo krypties programas magistrantūroje ir doktorantūroje. Nagrinėjami matematiniai metodai gali būti plačiai taikomi rašant kursinius ir magistrinius darbus, atliekant mokslinius tyrimus ir rengiant disertacijas. Jie suteikia galimybę nuodugniai išnagrinėti bet kurią sprendimų parengimo ir pagrindimo problemą, geriau suvokti iškylančių problemų esmę, rasti priimtinus sprendimų variantus ir pasirinkti geriausią iš jų. Šis vadovėlis naudingas visiems, norintiems susipažinti su vadinamaisiais operacijų tyrimų metodais.

Mokymo dalykas Sprendimų priėmimo teorija yra ganėtinai sudėtingas, reikalaujantis tam tikrų pradinių matematikos žinių lygio. Kai kurie studentai gali pamanyti, kad tai jiems bus sunkiai suprantama medžiaga, nes dalykas dėstomas humanitarams ar socialinių mokslų atstovams, kurie neįgiję pakankamo matematinio išsilavinimo. Iš tikrųjų šios abejonės neturi rimto pagrindo dėl tokių priežasčių.

Pirma, pateiktai medžiagai suprasti pakanka patenkinamų vidurinėse mokyklose ar gimnazijose įgytų matematikos žinių lygio.

Antra, pateiktame vadovėlyje medžiaga išdėstyta labai smulkiai su visais paaiškinimais ir praktiniais pavyzdžiais.

Trečia, šis mokymo dalykas dėstomas dieninių ir neakivaizdinių studijų studentams jau aštuonerius metus (nuo 2001 m.), ir praktika rodo, kad studentai medžiagą supranta, jei nuosekliai atlieka visas tarpines užduotis.

Ketvirta, atsiskaitant už šį mokymo dalyką leidžiama naudotis visa šiame vadovėlyje pateikta medžiaga, taip pat rekomenduojama arba kita literatūra bei šaltiniais. Be to, studentas gali spręsti pateiktas užduotis kompiuteriu, naudotis tuo tikslu parengtomis instrukcijomis.

Penkta, daugiausia dėmesio skiriama mokant interpretuoti gautų sprendimų rezultatus, daryti praktines išvadas, atlikti situacijos analizę ir numatyti jos plėtrą, gebėti savarankiškai formalizuoti svarbius praktinius uždavinius.

Kursas skirtas nustatyta tvarka įregistruotų Mykolo Romerio universiteto Viešojo administravimo, ES politikos ir administravimo, Savivaldos institucijų administravimo, Mokesčių administravimo magistro studijų programų studentams, taip pat Viešojo administravimo magistro studijų programos kai kurių specializacijų (Naujosios kaimynystės politikos, Viešojo sektoriaus strateginio valdymo, Sveikatos apsaugos įstaigų administravimo, Švietimo įstaigų administravimo, Veiklos audito) studentams. Be to, kursas reikalingas ir kitiems specialistams, pasirinkusiems tęstines studijas ar studijuojantiems šį mokymo dalyką savarankiškai.

Studijų dalyko Sprendimų priėmimo teorija apimtis – 4 kreditai.

Kurso paskirtis – rengiamiems vadybininkams suteikti žinių apie pagrindinius operacijų bei veiklos tyrimo metodus, padėti įgyti gebėjimų analizuoti tyrimais gautus duomenis bei informaciją ir savo veikloje išmokti priimti optimalius kiekybiškai pagrįstus vadybinius sprendimus.

Studijuodami kursą studentai išsiaiškins kiekybinių metodų reikšmę vadyboje ir viešajame administravime, suvoks pagrindines operacijų tyrimo sampratas, patikslins savo žinias apie sprendimų pagrindimo kriterijus ir rodiklius, išstudijuos pagrindinius operacijų tyrimų metodus.

Kursą supratę studentai mokės:

- formuluoti, spręsti ir interpretuoti tiesinio ir diskrečiojo programavimo uždavinius;
- sudaryti tinklinius grafikus, analizuoti juos, rasti optimalų darbų, vykdytojų ir išteklių paskirstymo variantą;
- formuluoti, spręsti įvairius uždavinius taikant masinio aptarnavimo sistemų teoriją ir daryti vertingas išvadas;
- analizuoti sprendimų variantus pasitelkę sprendimų medžių metodus;
- formuluoti sprendimus konfliktinėse situacijose, analizuoti tas situacijas, sudaryti mokesčių matricas, spręsti lošimų teorijos uždavinius ir tikslingai panaudoti gautas rekomendacijas;
- modeliuoti įvairias situacijas.

Studijų uždaviniai

Studijų uždaviniai išplaukia iš studijų tikslo ir įgyjamų gebėjimų. Kurso tikslas pasiekiamas palaipsniui, sprendžiant įvairius praktinius uždavinius.

Teorinė medžiaga pateikiama tik kartu su uždaviniais ir paaiškina taikomų metodų esmę. Visi uždaviniai yra susiję su kurso temomis.

Pirmas uždavinys. Suvokti situacijas, kuriose optimalus sprendimas gali būti gaunamas taikant tiesinio programavimo metodą. Įgyvendinant šį tikslą, išmokstama:

- nustatyti situacijas, kuriose taikomas šis metodas;
- suformuluoti tikslo funkciją;
- aprašyti egzistuojančius apribojimus;

- pasirinkti tinkamą uždavinio sprendimo metodą;
- išspręsti jį klasikiniu metodu ir taikant kompiuterines programas;
- interpretuoti gautą sprendimą;
- keisti pradinius duomenis ir analizuoti įvairius variantus.

Antras uždavinys. Suvokti situacijas, kuriose optimalus sprendimas gali būti gaunamas taikant diskrečiojo programavimo metodą. Įgyvendinant šį tikslą, išmokstama:

- nustatyti situacijas, kuriose taikomas šis metodas;
- suformuluoti tikslo funkciją;
- aprašyti egzistuojančius apribojimus;
- atsižvelgti į reikalavimą, kad kai kurie kintamieji gali būti tik sveikieji skaičiai;
- išspręsti šį uždavinį taikant kompiuterines programas;
- interpretuoti gautą sprendimą;
- keisti pradinius duomenis ir analizuoti įvairius variantus.

Trečias uždavinys. Išnagrinėti tinklinio planavimo pranašumus, etapus, analizės metodus ir sudarytų planų taikymo ypatumus.

Įgyvendinant šiuos tikslus, išmokstama:

- detalizuoti darbus, kurie turi būti atlikti;
- nustatyti tų darbų trukmę ir jų tarpusavio priklausomumą;
- sudaryti tinklinį grafiką;
- nustatyti visus tinklinio plano parametrus;
- atlikti kokybišką sudaryto plano vertinimą;
- tikslingai panaudoti turimus išteklius;
- taikyti kompiuterinę programą sudaryto grafiko analizei ir geriausio plano varianto paieškai;
- keisti pradinius duomenis ir analizuoti įvairius variantus;
- parengti taikytiną praktinėje veikloje sudaryto plano schemą.

Ketvirtas uždavinys. Suvokti situacijas, kuriose gali būti taikomi masinio aptarnavimo sistemų metodai. Įgyvendinant šį tikslą, išmokstama:

- nustatyti situacijas, kuriose taikomas šis metodas;
- parengti reikalingus pradinius duomenis;
- parinkti atitinkamą masinio aptarnavimo sistemos tipą;
- apskaičiuoti pagrindinius sistemos darbo rodiklius taikant kompiuterines programas;
- išsiaiškinti gautų rodiklių taikymo galimybes;
- keisti pradinius duomenis ir analizuoti įvairius kitus variantus;
- nustatyti reikalingą darbuotojų skaičių organizacijoje ar institucijoje.

Penktas uždavinys. Suvokti situacijas, kuriose gali būti taikomi lošimų teorijos metodai. Įgyvendinant šį tikslą, išmokstama:

- nustatyti situacijas, kuriose taikomas šis metodas;
- nustatyti savo ir priešininko galimų strategijų skaičių ir jų turinį;
- sudaryti mokesčių matricą;
- apskaičiuoti kiekvienos strategijos taikymo dažnius ir grynąją lošimo vertę;
- suvokti gauto sprendinio esmę;
- keisti pradinius duomenis ir analizuoti įvairius kitus variantus;
- parengti praktines rekomendacijas.

Šeštas uždavinys. Suvokti situacijas, kuriose gali būti taikomi sprendimų medžio metodai. Įgyvendinant šį tikslą, išmokstama:

- nustatyti situacijas, kuriose tikslinga taikyti šiuos metodus;
- sudaryti sprendimų medžio diagramas;
- tikslingai panaudoti turimą informaciją;
- apskaičiuoti įvykių ir sprendimų sekos pasekmes;
- pagrįsti papildomos informacijos paieškos poreikį;
- keisti pradinius duomenis ir analizuoti įvairius kitus variantus;
- parengti praktines rekomendacijas.

Atsiskaitymas už dalyko studijas vyksta raštu. Kiekvienas studentas sprendžia tris užduotis, atrinktas atsitiktiniu būdu iš išstudijuotų šešių temų. Egzaminui skirta 90 minučių. Egzamino metu galima naudotis bet kokia literatūra bei kompiuteriais.

1 TEMA

TIESINIS PROGRAMAVIMAS

Tai vienas iš svarbiausių operacijų tyrimų metodų, įgalinančių spręsti optimizacijos uždavinius.

1.1. Tiesinio programavimo uždavinių pavyzdžiai

Taikant šį metodą, galima spręsti daug įvairių praktinių uždavinių. Iš jų paminėtini gamybos, realizacijos, transporto, pirkimo, paskirstymo ir kiti uždaviniai.

Uždavinys 1.1. Gamybos uždavinys

UAB „Langai ir durys“ gamina langus ir duris.

Sandėlyje turimos gamybinių medžiagų atsargos, gamybai reikiamas laikas, užsakymų atlikimo terminai ir gaunamas pelnas pateikti 1 lentelėje.

1 lentelė. **Pradiniai duomenys**

Rodiklis	Gaminys		Atsargos, terminas
	1 langas	1 durys	
Plastikas, kg	10	5	300
Stiklas, kg	5	4	200
Darbo sąnaudos, val.	15	10	600
Pelnas, Lt	30	20	

Reikia sudaryti tokį langų ir durų rinkinį, kuriam esant gaunamas didžiausias pelnas.

Uždavinys 1.2. Išteklių paskirstymo uždavinys

Turime tam tikrų išteklių (žaliavos, darbininkų, staklių ir t. t.) $R_1, R_2, ..., R_m$, kurių kiekis yra $b_1, b_2, ..., b_m$.

Iš tų išteklių galima pagaminti skirtingų gaminių T_1, T_2, ..., T_n.

Norint pagaminti vieną gaminio T_j vienetą, reikia R_i vienetų a_{ij} išteklių ($i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$).

Vienas išteklių vienetas kainuoja d_i litų. Kiekvienas gaminio vienetas gali būti parduotas už c_j litų.

Kiek ir kokių gaminių reikia planuoti norint gauti didžiausią pelną?

Uždavinys 1.3. Transporto uždavinys

Yra m sandėlių S_1, S_2, ..., S_m ir n vartotojų punktų V_1, V_2, ..., V_n.

Prekių atsargų kiekiai sandėliuose a_1, a_2, ..., a_m.

Vartotojai pateikė paraiškas tokių prekių kiekių: b_1, b_2, ..., b_n.

Paraiškos gali būti patenkintos, nes pageidaujamų prekių kiekis yra sandėliuose.

Sandėliai ir vartotojai sujungti kelių tinklu.

Vienos prekės pervežimas iš sandėlio S_i į punktą V_j kainuoja c_{ij} litų.

Reikia sudaryti prekių pristatymo planą, t. y. nurodyti, iš kurio sandėlio, kuriam vartotojui ir kiek reikia atvežti prekių, kad pervežimo išlaidos būtų kuo mažesnės.

Uždavinys 1.4. Slenkanti žemė

Savivaldybė nori sutvarkyti slenkantį kelio link šlaitą.

Specialistai siūlo šią problemą spręsti apsodinant sklypą pušaitėmis. Yra kelios pušaičių rūšys, kurios skiriasi kaina, sutvirtinamu žemės plotu, kiekvienos rūšies pušaičių prigijimo šlaite tikimybe. Savivaldybė šiam reikalui gali skirti tam tikrą pinigų kiekį.

Reikia nuspręsti, kokios rūšies ir kiek pušaičių tikslinga pirkti ir sodinti, kad būtų sustabdytas to šlaito slinkimas.

Tokio tipo uždaviniai sprendžiami pasitelkus tiesinio programavimo metodą.

1.2. Bendrieji reikalavimai tiesinio programavimo uždaviniams

Šis metodas gali būti taikomas, jei:

- yra tik vienas kriterijus;
- kriterijus priklauso nuo pirmojo laipsnio kintamųjų x_1, x_2, ...;
- ribinės sąlygos yra lygybės arba nelygybės, kurios taip pat turi tik pirmojo laipsnio kintamuosius x_1, x_2, ..., (iš 2 ir 3 punkto reikalavimų kilęs pavadinimas – tiesinis programavimas);
- visi kintamieji yra neneigiami.

Pažiūrėsime, kaip šie reikalavimai taikomi sprendžiant konkrečius uždavinius.

Uždavinio 1.1 formulavimas

Pažymime: x_1 – langų skaičius; x_2 – durų skaičius.

Formuluojame ribines sąlygas (žr. 1 lentelę).

Nagrinėjame apribojimus, kurie susiję su turimomis plastiko atsargomis.

Visiems langams pagaminti reikia $10x_1$, visoms durims – $5x_2$ kilogramų plastiko.

Sandėlyje yra 300 kilogramų plastiko. Vadinasi, turi būti teisinga tokia sąlyga:

$$10x_1 + 5x_2 \leq 300 .$$

Nagrinėjame apribojimus, kurie susiję su turimomis stiklo atsargomis.

Visiems langams pagaminti reikia $5x_1$, visoms durims – $4x_2$ kilogramų stiklo.

Sandėlyje yra 200 kilogramų stiklo. Vadinasi, turi būti teisinga tokia sąlyga:

$$5x_1 + 4x_2 \leq 200 .$$

Nagrinėjame apribojimus, susijusius su darbo laiko sąnaudomis.

Visiems langams pagaminti reikia $15x_1$, visoms durims – $10x_2$ valandų.

Užsakymui skirta 600 valandų. Vadinasi, turi būti teisinga tokia sąlyga:

$$15x_1 + 10x_2 \leq 600 .$$

Atsižvelgta į visus apribojimus.

Reikia suformuluoti tikslo funkciją. Ji turi tiesiogiai išplaukti iš gamybos tikslo. Norima gauti kuo didesnį pelną. Kadangi pelnas pagaminus vieną langą yra 30 litų, vienerias duris – 20 litų, tai už visus langus gaunama $30x_1$, o visas duris – $20x_2$ litų. Vadinasi, tikslo funkcija yra tokia

$$L = 30x_1 + 20x_2 \to \max .$$

Uždavinys suformuluotas. Matome, kad visos sąlygos atitinka tiesinio programavimo reikalavimus:

- langų ir durų skaičius negali būti neigiamas;
- visos ribinės sąlygos ir tikslo funkcija susieta su kintamaisiais tik pirmu laipsniu;
- yra tik vienas kriterijus – pelnas, kurį reikia kuo labiau padidinti;
- ribinės sąlygos yra nelygybės.

Kiti uždaviniai formalizuojami analogiškai. Jie nagrinėjami atitinkamose šio vadovėlio vietose.

1.3. Tiesinio programavimo uždavinių sprendimo būdai

Tiesinio programavimo uždaviniai sprendžiami tokiais būdais:

- grafiniu;
- lentelių;
- simpleksų metodu;
- kompiuterine programa Solver.

Paprasčiausias iš jų yra grafinis sprendimo metodas, tačiau jį galima taikyti tik esant teisingai dar vienai papildomai sąlygai. Šis metodas leidžia suvokti tiesinių uždavinių sprendimo subtilybes, todėl jį verta išnagrinėti smulkiai.

1.4. Grafinis sprendimo būdas

1.4.1. Teorija

Tiesinio programavimo uždaviniai gali būti sprendžiami grafiniu būdu, jeigu teisinga sąlyga

$$n - m = 2,$$

čia n – bendras kintamųjų kiekis;
m – ribinių sąlygų skaičius.

Kadangi kintamųjų yra dviem daugiau negu ribinių sąlygų, tai bet kuriuos du kintamuosius galime laikyti laisvai pasirenkamais, o kitus – vadinamus baziniais – išreikšti jais.

$$\begin{aligned} x_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \beta_3, \\ x_4 &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + \beta_4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \beta_n. \end{aligned}$$

Kiekviena ribinė sąlyga nustato plokštumos dalį, kurioje yra galimų sprendinių sritis (GSS).

Skiriamoji (ribinė) linija yra tiesė. Visos ribinės tiesės formuoja GSS.

Uždavinio sprendimas gali būti suskirstytas į keturis etapus:

1) galimų sprendinių srities (GSS) identifikavimas;

2) tikslo funkcijos tiesės brėžimas;

3) šios funkcijos didėjimo (mažėjimo) krypties nustatymas;

4) sprendinio radimas.

1 etapas. Galimų sprendinių srities ribas nusako ribinės lygtys, kai atitinkami baziniai kintamieji yra lygūs nuliui. Ta plokštumos dalis, kurioje yra teisingos visos ribinės sąlygos ir laisvieji kintamieji yra neneigiami, vadinama galimų sprendinių sritimi.

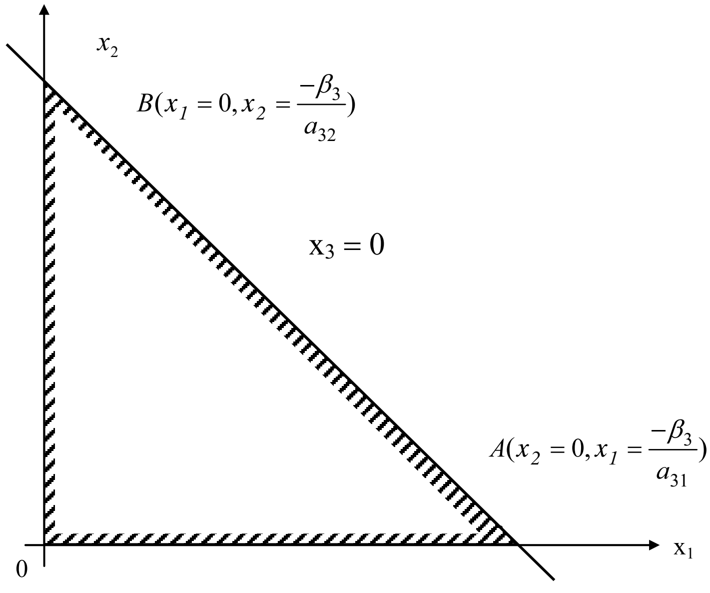
Kadangi laisvieji kintamieji yra x_1 ir x_2, tai jie žymimi ant abscisės ir ordinatės ašių.

Braižome koordinačių ašis Ox_1 *ir* Ox_2 (1, 2 pav.).

Kadangi $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, tai galimų sprendinių sritis gali būti tik pirmame ketvirtyje.

Norint ją nubrėžti, reikia išnagrinėti visas ribines lygtis.

Nagrinėjame pirmąją lygtį $x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \beta_3 \geq 0$.



1 pav. **GSS esant vienai ribinei lygčiai**

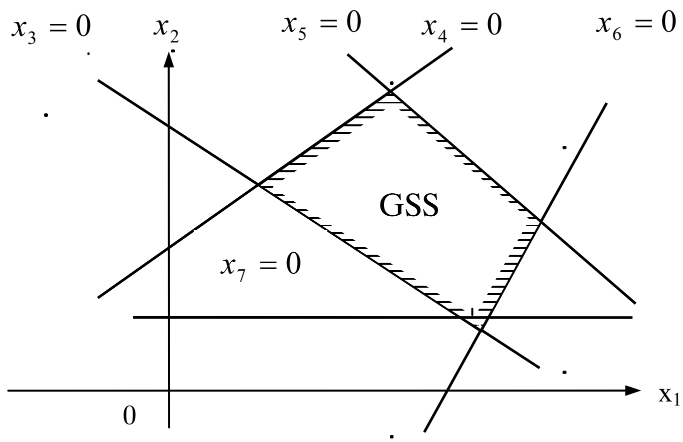
Kraštutinė jos reikšmė yra $x_3 = 0$. Todėl $0 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \beta_3$.

Tai tiesės lygtis. Ji dalija plokštumą į dvi pusplokštumes: vienoje iš jų $x_3 < 0$, kitoje $x_3 > 0$ (kurioje – priklauso nuo koeficientų).

Paprasčiausia šį faktą nustatyti taip: laikome, kad $x_1 = x_2 = 0$, jei β_3 teigiamas koeficientas, tai $x_3 > 0$ pusplokštumėje, kurioje yra koordinačių ašių taškas, ir atvirkščiai (1pav.).

Tarkime, kad β_3 yra teigiamas skaičius. Tada galimų sprendinių sritis yra žemiau tiesės $x_3 = 0$. Šį faktą pažymime brūkšneliais prie $x_3 = 0$ tiesės.

Taip braižomos visos ribinės lygtys (2 pav.).



2 pav. **GSS turint daug ribinių lygčių**

Dalis plokštumos, kurioje visi kintamieji neneigiami, yra galimų sprendinių sritis (GSS).

Ant šios srities ribų yra optimalus sprendinys.

Jam surasti panaudosime kriterijų (tikslo funkciją)

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n,$$

kurią reikia minimizuoti (arba maksimizuoti).

***2 etapas.* Tikslo funkcijos brėžimas**

Išreiškiame tikslo funkciją laisvaisiais kintamaisiais. Gauname

$$L = \gamma_0 + \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2.$$

Norint nubrėžti šią tiesę, reikia pasirinkti kokią nors funkcijos L reikšmę, tarkime, $L_1 = 0$, ir surasti šiai vadinamajai pradinei tiesei priklausančius du taškus.

Jei koeficientas γ_0 nėra lygus nuliui, tai lengviausiai tie du taškai yra randami taip:

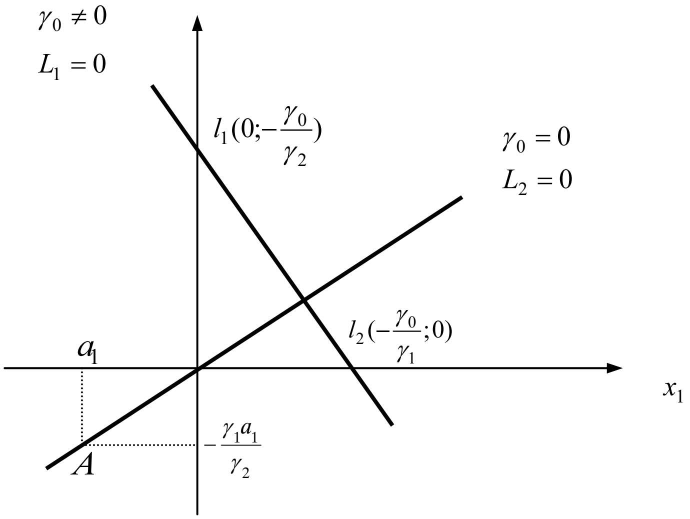
- pirmas taškas (l_1), kai $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{-\gamma_0}{\gamma_2}$;
- antras taškas (l_2), kai $x_2 = 0$, $x_1 = \frac{-\gamma_0}{\gamma_1}$.

Sujungę tuos taškus tiese, gauname $L_1 = 0$ (3 pav.).

Kai $\gamma_0 = 0$, pasirenkame bet kokią kintamojo x_1 reikšmę (tarkime a_1) ir apskaičiuojame x_2 reikšmę, kai $L_2 = 0$. Gauname tašką A: $x_1 = a_1$, $x_2 = \frac{-\gamma_1 a_1}{\gamma_2}$ (3 pav.).

Tašką A sujungiame su koordinačių ašių susikirtimo tašku, nes kai $x_1 = x_2 = 0$, $L_2 = 0$.

Gauname tiesę $L_2 = 0$.

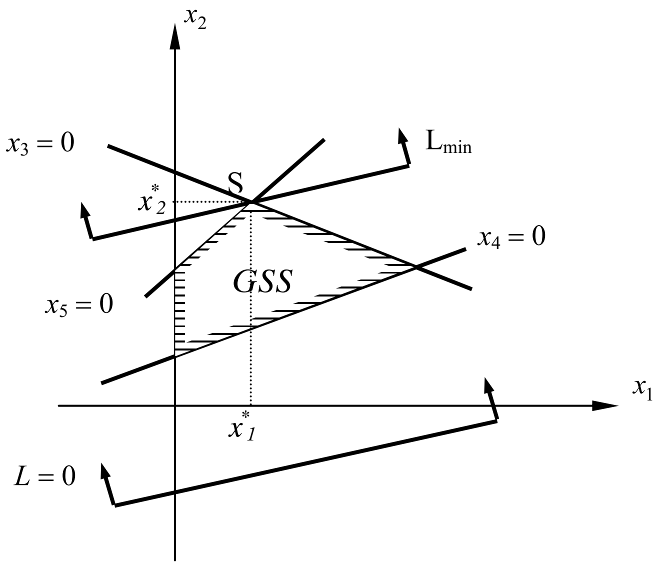


3 pav. **Tikslo funkcijos brėžimas**

2 etapas baigtas.

3 etapas. **Tikslo funkcijos didėjimo (mažėjimo) krypties nustatymas**

Norint nustatyti tikslo funkcijos didėjimo (mažėjimo) kryptį, reikia pasirinkti bet kokį tašką, kuris nėra ant tikslo funkcijos tiesės, apskaičiuoti tikslo funkcijos reikšmę pasirinktame taške, palyginti tą reikšmę su 2 etape pasirinkta pradinės tiesės reikšme. Jei ši reikšmė yra didesnė (mažesnė) už šios pasirinktos tikslo funkcijos reikšmę, tai, „stumiant" pradinę tikslo funkcijos tiesę to taško link, jos reikšmės didės (mažės). Jei reikšmės didėja, tai yra didėjimo kryptis, ir atvirkščiai. Vadinasi, pradinę tiesę $L = 0$ reikia stumti lygiagrečiai su pradine tiese į tą pusę, kurioje tikslo funkcijos reikšmė mažėja, jei tikslo funkcija minimizuojama, ir priešinga kryptimi, jei maksimizuojama.



4 pav. **Optimalaus sprendinio radimas**

Tikslo funkcijos mažėjimo (didėjimo) kryptis pažymime rodyklėlėmis tiesės galuose (4 pav.).

4 etapas. **Optimalaus sprendinio radimas**

Kad rastume optimalų sprendinį, turime nubrėžti galimų sprendinių sritį ir tikslo funkciją, kai jinai yra lygi nuliui arba kokiai nors kitai pasirinktai reikšmei, keisti tikslo funkcijos tiesės padėtį mažėjimo (didėjimo) kryptimi į tokią padėtį, kad jinai liestų galimų sprendinių sritį jos krašte, nustatyti to taško koordinates x_1 ir x_2, apskaičiuoti bazinių kintamųjų ir tikslo funkcijos reikšmes.

Tai ir yra optimalus sprendinys (4 pav.), taškas S.

Šis sprendinys gali būti randamas dviem būdais: artutiniu ir tiksliu. Artutinis sprendinys randamas grafiniu būdu, nubrėžus statmenis iš taško S ant koordinačių ašių.

Gaunamos laisvųjų kintamųjų optimalios reikšmės x_1^* ir x_2^*.

Kadangi visi baziniai kintamieji ir tikslo funkcija išreikšti laisvaisiais kintamaisiais, tai lengvai apskaičiuojamos bazinių kintamųjų ir tikslo funkcijos reikšmės.

Tačiau sprendinys, gautas grafiniu būdu, nėra tikslus net ir gana kruopščiai pavaizdavus galimų sprendinių sritį bei pradinę tikslo funkcijos tiesę.

Grafiniu būdu nustačius, kuriame galimų sprendinių srities taške S yra optimalus sprendinys, rekomenduojama nustatyti laisvųjų kintamųjų x_1^* ir x_2^* optimalias reikšmes tiksliu būdu.

Šio būdo esmė yra tokia: nustatoma, kokios dvi tiesės susikerta taške S (jei jų yra daugiau negu dvi, pasirenkamos bet kurios dvi iš šių tiesių).

4 paveiksle tai tiesės $x_3 = 0$ ir $x_5 = 0$.

Gauname lygčių sistemą

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \beta_3 = 0,$$

$$a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + \beta_5 = 0,$$

kurioje yra du nežinomieji ir dvi lygtys. Išsprendę šį uždavinį, randame tikslias laisvųjų kintamųjų x_1^* ir x_2^* optimalias reikšmes.

Kaip taikomas išnagrinėtas algoritmas, parodysime spręsdami konkrečius uždavinius.

1.4.2. Praktika

Uždavinys 1.5. Yra 7 kintamieji $x_1, x_2, ..., x_7$ (n = 7) ir 5 ribinės lygtys (m = 5).

$$\begin{gathered} -x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ 9x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \\ 5x_1 + 12x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 45, \\ -2x_1 + x_2 - x_6 = -2, \\ 8x_1 - 8x_2 + 2x_3 - x_5 - x_7 = -20. \end{gathered}$$

Reikia minimizuoti tikslo funkciją

$$L = x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_5 - 2x_6 + 3x_7.$$

Sprendimas. Kadangi n – m = 7 – 5 = 2, uždavinį galima spręsti grafiniu būdu.

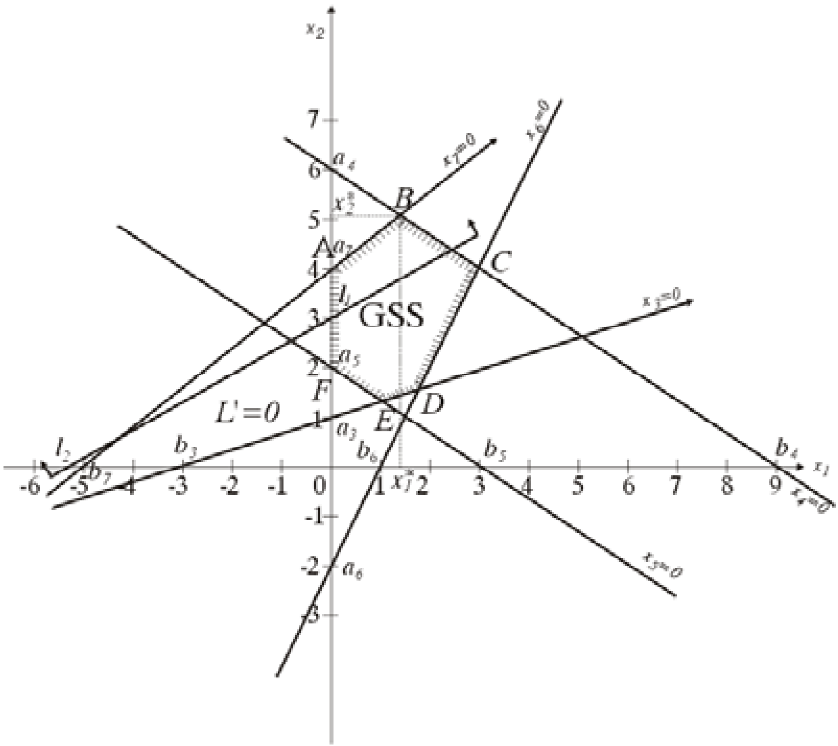
Pasirenkame laisvuosius kintamuosius x_1 ir x_2. Bazinius kintamuosius išreiškiame laisvaisiais:

$$x_3 = -3 - x_1 + 3x_2 \text{ (iš pirmos lygties)},$$
$$x_4 = 18 - 2x_1 - 3x_2 \text{ (iš antros lygties)},$$
$$x_5 = -6 + 2x_1 + 3x_2 \text{ (iš trečios lygties)},$$
$$x_6 = 2 - 2x_1 + x_2 \text{ (iš ketvirtos lygties)},$$
$$x_7 = 20 + 4x_1 - 5x_2 \text{ (iš penktos lygties)}.$$

Kriterijų taip pat išreiškiame laisvaisiais kintamaisiais:

$$L = 18x_1 - 30x_2 + 95.$$

Pereiname prie pirmo sprendinio paieškos algoritmo etapo – galimų sprendinių srities ribų nustatymo. Jos nustatomos taip (5 pav.):



5 pav. **Optimalaus sprendinio radimas**

1. Tiesė $x_3 = 0$ (pirma lygtis): kai $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ (taškas a_3); kai $x_2 = 0$, $x_1 = -3$ (taškas b_3).

Sujungiame taškus a_3 *ir* b_3 ir gauname tiesę $x_3 = 0$.

Nustatome, kurioje tiesės $x_3 = 0$ pusėje yra GSS.

Imame bet kurį tašką, esantį žemiau tiesės $x_3 = 0$, pavyzdžiui, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Kadangi šiame taške $x_3 < 0$ ($x_3 = -3$), tai GSS yra į viršų nuo tiesės $x_3 = 0$.

2. Tiesė $x_4 = 0$ (antra lygtis): kai $x_1 = 0$, $x_2 = 6$ (taškas a_4); kai $x_2 = 0$, $x_1 = 9$ (taškas b_4).

Sujungiame taškus a_4 *ir* b_4 ir gauname tiesę $x_4 = 0$.

Nustatome, kurioje tiesės $x_4 = 0$ pusėje yra GSS.

Imame bet kurį tašką, esantį žemiau tiesės $x_4 = 0$, pavyzdžiui, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Šiame taške $x_4 > 0$ ($x_4 = 18$), todėl šis taškas yra žemiau nei tiesė $x_4 = 0$. Šiame taške $x_3 < 0$ ($x_3 = -3$), todėl GSS yra žemiau nei tiesė $x_4 = 0$, tai ir GSS yra žemiau.

3. Tiesė $x_5 = 0$ (trečia lygtis): kai $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ (taškas a_5); kai $x_2 = 0$, $x_1 = 3$ (taškas b_5).

Sujungiame taškus a_5 ir b_5 ir gauname tiesę $x_5 = 0$.

Nustatome, kurioje šios tiesės pusėje yra GSS.

Imame bet kurį ne šios tiesės tašką, pavyzdžiui, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Kadangi šiame taške $x_5 < 0$ ($x_5 = -6$), ir šis taškas yra žemiau nei tiesė $x_5 = 0$, tai GSS yra virš jos.

4. Tiesė $x_6 = 0$ (ketvirta lygtis): kai $x_1 = 0$, $x_2 = -2$ (taškas a_6); kai $x_2 = 0$, $x_1 = 1$ (taškas b_6).

Sujungiame taškus a_6 *ir* b_6 ir gauname tiesę $x_6 = 0$.

Nustatome, kurioje tiesės $x_6 = 0$ dalijamoje plokštumos pusėje yra GSS.

Imame, pavyzdžiui, tašką $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Kadangi šiame taške $x_6 > 0$ ($x_6 = 2$) ir šis taškas yra virš tiesės $x_6 = 0$, tai ir GSS yra virš jos.

5. Tiesė $x_7 = 0$ (penkta lygtis): kai $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ (taškas a_7); kai $x_2 = 0$, $x_1 = -5$ (taškas b_7).

Sujungiame taškus a_7 *ir* b_7 ir gauname tiesę $x_7 = 0$.

Nustatome, kurioje šios tiesės dalijamoje plokštumos pusėje yra GSS.

Imame, pavyzdžiui, tašką $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Kadangi šiame taške $x_7 > 0$ ($x_7 = 20$) ir šis taškas yra žemiau nei tiesė $x_7 = 0$, tai ir GSS yra žemiau.

Galimų sprendinių sritis pažymėta 5 pav. daugiakampiu ABCDEF.

Pirmas sprendinio paieškos algoritmo etapas baigtas.

Pereiname prie antro šio algoritmo etapo – tikslo funkcijos tiesės brėžimo.

Brėžiame pradinę tikslo funkcijos tiesę $L_1 = 18x_1 - 30x_2 + 95$, kai ji yra lygi nuliui, t. y.

$$0 = 18x_1 - 30x_2 + 95 .$$

Apskaičiuojame dvi tos pradinės tiesės $L_1 = 0$ koordinates (5 pav. taškai l_1 ir l_2):

$$l_1\text{: kai } x_1 = 0,\ x_2 = \frac{95}{30} = 3{,}17,$$

$$l_1\text{: kai } x_2 = 0,\ x_1 = -\frac{95}{18} = -5{,}28 .$$

Sujungę šiuos du taškus, gauname pradinės tikslo funkcijos tiesę, kai ši lygi nuliui.

Pereiname prie trečio šio algoritmo etapo – tikslo funkcijos mažėjimo krypties nustatymo.

Matome, kad kai $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $L_2 = 95$.

Vadinasi, mažėjimo kryptis eina į viršų ir į kairę.

Pažymime tą kryptį rodyklėmis.

Baigtas trečias sprendinio paieškos algoritmo etapas.

Pereiname prie ketvirto sprendinio paieškos algoritmo etapo.

„Stumdami“ tą tiesę nustatyta kryptimi, lygiagrečiai su pradine jos padėtimi, randame sprendinį taške B.

Artutinis sprendinys, pažymėtas koordinačių ašyse x_1^*, x_2^* (5 pav.), yra sprendinys, gautas grafiniu būdu.

Ieškome tikslaus uždavinio sprendinio.

Matome, kad taške B susikerta dvi tiesės $x_4 = 0, x_7 = 0$, todėl spręsdami lygčių sistemą

$$18 - 2x_1 - 3x_2 = 0,$$
$$4x_1 - 5x_2 + 20 = 0$$

nustatome, kad $x_1^* = 1{,}36$, $x_2^* = 5{,}09$.

Kadangi $L = 18x_1 - 30x_2 + 95$, tai

$$L_{\min} = 18 \cdot 1{,}36 - 30 \cdot 5{,}09 + 95 = -33{,}22 .$$

Optimalus sprendinys yra:

$$x_1^* = 1{,}36,\ x_2^* = 5{,}09\ ,\ x_3^* = 10{,}91,\ x_4^* = 0,$$

$$x_5^* = 11{,}99,\ x_6^* = -2,\ x_7^* = 0 .$$

Uždavinys išspręstas.

Grafinis uždavinio sprendimo būdas leidžia padaryti šias išvadas:

1. Sprendinys, jei jis egzistuoja, gali būti tik ant GSS ribos.

2. Sprendinys gali būti ir ne vienintelis, jei tikslo funkcijos tiesė yra lygiagreti su ta galimų sprendinių srities šonine briauna, kurioje jis yra minimalus (maksimalus).

3. Uždavinys gali neturėti sprendinio net ir esant galimų sprendinių sričiai, jei ši sritis rodyklių kryptimi neribota.

4. Sprendinys visada yra kurioje nors GSS daugiakampio viršūnėje.

Šis sprendinys vadinamas ***atraminiu sprendiniu,*** o pati viršūnė – ***atraminiu tašku.***

5. Norint rasti optimalų sprendinį, užtenka išnagrinėti visus atraminius taškus ir pasirinkti tą, kuriame tikslo funkcija yra minimali (maksimali).

6. Jeigu laisvųjų kintamųjų yra 2 ir jei sprendinys egzistuoja, tai jis yra taške, kuriame bent du kintamieji lygūs nuliui.

Bendru atveju, kai laisvųjų kintamųjų yra daugiau nei du:

1. Optimalus sprendinys, jeigu jis egzistuoja, yra viename iš atraminių taškų.

2. Norint rasti optimalų sprendinį, reikia skaičiuoti kriterijaus reikšmes atraminiuose taškuose ir eiti tikslo funkcijos mažėjimo (didėjimo) kryptimi.

1.5. Tiesinio programavimo uždavinių sprendimas kompiuteriu

Tiesinio ir diskrečiojo programavimo uždaviniai sprendžiami, jei įdiegta standartinė Microsoft Excel programa Solver. Šios programos taikymo ypatumai geriau suvokiami, jei nagrinėjamas konkretus pavyzdys.

Uždavinys 1.5

Išspręskime uždavinį 1.5 kompiuteriu.

Tarkime, reikia minimizuoti tikslo funkciją

$$L = x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_5 - 2x_6 + 3x_7 ,$$

kai teisingos tokios ribinės sąlygos:

$$-x_1 + 3x_2 - x_3 = 3,$$

$$9x_2 - 2x_3 + x_4 = 24,$$

$$5x_1 + 12x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 45,$$

$$-2x_1 + x_2 - x_6 = -2,$$
$$8x_1 - 8x_2 + 2x_3 - x_5 - x_7 = -20.$$

Sprendimas. Uždavinys sprendžiamas simpleksų metodu, todėl nebūtina jį standartizuoti, išskirti laisvuosius ir bazinius kintamuosius, aiškintis, ar galima jį spręsti grafiniu būdu.

Vadinasi, nereikia atlikti minėtų veiksmų ir tai palengvina uždavinio sprendimą. Tačiau būtina labai tiksliai suvesti visus duomenis, priešingu atveju gaunamas neteisingas sprendimas arba nepateikiamas joks sprendimas.

Norint tiksliai atlikti visus veiksmus, pageidautina juos suskirstyti į atskirus žingsnius.

1. Įjungiame Excel programą: Start; Microsoft Excel.

2. Pasirenkame langelius, kuriuose užrašomos kintamųjų x_1, ..., x_7 reikšmės. Norint išvengti painiavos, tikslinga pasirinkti dvi langelių eiles. Pirmoje (viršutinėje) eilėje reikia užrašyti kintamųjų simbolius, antroje – jų reikšmes.

Tarkime, kintamųjų simbolius užrašysime langeliuose C1:I1, o jų reikšmes – langeliuose C2:I2, kaip tai parodyta 2 lentelėje. Pasirinktos pradinės kintamųjų reikšmės lygios nuliui.

2 lentelė. **Kintamųjų paskirstymas**

Nr.	C	D	E	F	G	H	I
1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
2	0	0	0	0	0	0	0

3. Langeliuose C3:I7 užrašome ribinių sąlygų koeficientus, kaip tai parodyta 3 lentelėje.

3 lentelė. **Koeficientai prie kintamųjų ribinėse sąlygose**

Nr.	C	D	E	F	G	H	I
3	-1	3	-1	0	0	0	0
4	0	9	-2	1	0	0	0
5	5	12	-1	2	-1	0	0
6	-2	1	0	0	0	-1	0
7	8	-8	2	0	-1	0	-1

4. Langeliuose A3:A7 užrašome ribinių sąlygų laisvuosius narius (žr. 4 lentelę).

5. Langeliuose B3:B7 užrašome ribinių sąlygų apskaičiavimo formules, kaip tai parodyta 4 lentelėje.

4 lentelė. **Ribinių sąlygų laisvieji nariai (langeliai A3:A7) ir ribinių sąlygų apskaičiavimo formulės (langeliai B3:B7)**

Nr.	A	B
3	3	=C2*C3+D2*D3+E2*E3+F2*F3+G2*G3+H2*H3+I2*I3
4	24	=C2*C4+D2*D4+E2*E4+F2*F4+G2*G4+H2*H4+I2*I4
5	45	=C2*C5+D2*D5+E2*E5+F2*F5+G2*G5+H2*H5+I2*I5
6	-2	=C2*C6+D2*D6+E2*E6+F2*F6+G2*G6+H2*H6+I2*I6
7	-20	=C2*C7+D2*D7+E2*E7+F2*F7+G2*G7+H2*H7+I2*I7

Pastaba. Langeliuose B3:B7 turi pasirodyti nuliai, kai baigtas formulių rinkimas, nes visi kintamieji yra lygūs nuliui.

Langelyje J2 (arba bet kokiame kitame laisvame langelyje) užrašome tikslo funkcijos apskaičiavimo formulę:

=C2–D2–3*E2+2*F2+G2–2*H2+3*I2.

6. Visi reikiami duomenys įvesti. Pavedame kompiuteriui spręsti šį uždavinį. Tam reikia:

7. Įjungti sprendimo režimą: Tools; Solver. Dialogo langelyje reikia atlikti tokius veiksmus:

7.1. Set Target Cell: J2 (žymeklį uždėti ant langelio J2).

7.2. Pažymėti Min, nes norima minimizuoti tikslo funkciją.

7.3. By Changing Cells: C2:I2 (nuoroda į visus kintamuosius).

7.4. Add (nuorodos į ribines sąlygas):

- Cell Reference: B3:B7 (nuorodos į ribinių sąlygų formules);
- = (visose ribinėse sąlygose yra lygybės ženklai. Jei ribinių sąlygų ženklai yra skirtingi, reikia sugrupuoti tas sąlygas pagal bendrus ženklus ir įvesti duomenis atskirai);
- Constraints: A3:A7 (nuorodos į ribinių sąlygų laisvuosius narius);
- OK.

7.5. Add (nuorodos, kad visi kintamieji turi būti neneigiami):

- Cell Reference: C2:I2;
- >= 0;
- OK.

8. Solve; Keep Solver Solution; OK.
9. Skaitome sprendimą:

$$L = -33{,}18,$$

$$x_1 = 1{,}36,\ x_2 = 5{,}09,\ x_3 = 10{,}9,\ x_4 = 0,\ x_5 = 12,\ x_6 = 4{,}36,\ x_7 = 0.$$

Uždavinys išspręstas.

Savitikros užduotys

1. Teoriniai klausimai:

1.1. Suformuluokite tiesinio programavimo metodo taikymo sąlygas.

1.2. Kas yra galimų sprendinių sritis?

1.3. Apibūdinkite laisvuosius ir bazinius kintamuosius.

1.4. Kaip galima apskaičiuoti, koks turi būti pasirinktas laisvųjų kintamųjų skaičius?

1.5. Kas yra tikslo funkcija?

1.6. Kada gali būti taikomas grafinis tiesinio programavimo uždavinio sprendimo būdas?

1.7. Kokia yra tiesinio programavimo uždavinio standartizavimo tvarka?

1.8. Kokius reikalavimus turi atitikti atraminis sprendinys?

1.9. Kaip randamas artutinis sprendinys? Kaip randamas tikslus sprendinys?

1.10. Paaiškinkite, kodėl sprendinys gali būti tik ant galimų sprendinių ribų.

1.11. Kada sprendinys gali būti ne vienintelis? Parodykite tai brėžinyje.

1.12. Kada uždavinys neturi sprendinio?

2. Praktinės užduotys:

2.1. Nustatykite, kurioje tiesės $x_3 = 5x_1 - 4x_2 - 4$ pusėje x_3 yra neneigiamas.

Parodykite tai brėžinyje.

2.2. Išspręskite 2.1 uždavinį, jei $x_3 = 5x_1 - 4x_2$.

2.3. Pavaizduokite brėžinyje tikslo funkcijos tiesę $L = 3x_1 - 4x_2$. Kur yra jos didėjimo (mažėjimo) kryptis?

2.4. Reikia maksimizuoti tikslo funkciją

$$L = x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_5 - 2x_6 + 3x_7,$$

kai teisingos tokios ribinės sąlygos:

$$-x_1 + 3x_2 - x_3 = 3,$$
$$9x_2 - 2x_3 + x_4 = 24,$$
$$5x_1 + 12x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 45,$$
$$-2x_1 + x_2 - x_6 = -2,$$
$$8x_1 - 8x_2 + 2x_3 - x_5 - x_7 = -20.$$

Atsakymas:

L = 79,4,

$x_1 = 1{,}8$, $x_2 = 1{,}6$, $x_3 = 0$, $x_4 = 9{,}6$, $x_5 = 2{,}4$, $x_6 = 0$, $x_7 = 19{,}2$.

2.5. Minimizuokite tikslo funkciją

$$L = -x_1 - 3x_2 - 3,$$

esant tokioms ribinėms sąlygoms;

$$x_3 = 4x_1 - 5x_2 - 20,$$
$$x_4 = 3x_1 + 6x_2 - 18,$$
$$x_5 = 5x_1 + 3x_2 - 15,$$
$$x_6 = -3x_1 - 4x_2 + 24,$$
$$x_i \geq 0, i = 1,2, ..., 6.$$

Atsakymas:

L = –12,94,

$x_1 = 6{,}45$, $x_2 = 1{,}16$.

2.6. Išspręskite 2.5 uždavinį, jei reikia tikslo funkciją maksimizuoti.

Atsakymas:

L = –9,

$x_1 = 6$, $x_2 = 0$.

1.6. Simpleksų metodas

Bendru atveju grafinis sprendimo metodas negali būti taikomas, nes $n - m \neq 2$. Norint rasti sprendinį šiuo atveju, taikomas universalus metodas. Universaliausias yra simpleksų metodas. Jo idėja tokia. Tarkime, tiesinio programavimo uždavinys turi n kintamųjų ir m nepriklausomų tiesinių ribinių lygčių.

Pasirenkame bet kuriuos $k = n - m$ kintamuosius kaip laisvuosius. Išreiškiame visus likusius bazinius kintamuosius naudodamiesi tik laisvaisiais kintamaisiais.

Sakykime, kad laisvaisiais pasirinkome pirmuosius k kintamuosius: $x_1, x_2, \dots, x_k$. Tada baziniai kintamieji gali būti parašyti taip:

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \dots + a_{k+1,k}x_k + \beta_{k+1},\\
x_{k+2} &= a_{k+2,1}x_1 + a_{k+2,2}x_2 + \dots + a_{k+2,k}x_k + \beta_{k+2},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
x_n &= a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,k}x_k + \beta_n.
\end{aligned}
$$

Tarkime, visi laisvieji kintamieji lygūs nuliui: $x_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Tada išeitų, kad

$$x_{k+1} = \beta_{k+1},\ x_{k+2} = \beta_{k+2},\ \dots,\ x_n = \beta_n.$$

Tai vienas iš galimų uždavinio sprendimo variantų, jei visi $\beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \dots, \beta_n$ neneigiami. Tarkime, taip ir yra. Šiuo atveju mes radome vieną iš atraminių sprendinių. Bet ar jis optimalus? Norėdami tai patikrinti, parašome kriterijų pasinaudodami laisvaisiais kintamaisiais $x_1, x_2, \dots, x_k$:

$$L = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \dots + \gamma_k x_k.$$

Suprantama, kad šiuo atveju tikslo funkcija $L = \gamma_0$. Tikriname, ar galima šią funkciją sumažinti didinant tam tikrus laisvuosius kintamuosius. Jeigu visi koeficientai $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ teigiami, tai sumažinti L negalime, ir todėl šis atraminis sprendinys yra optimalus.

Jei tam tikri koeficientai γ_i ($i = 1, 2, \dots, k$) neigiami, tai sprendinys $x_I = 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$) nėra optimalus.

Tarkime, kad γ_1 yra neigiamas. Tada yra prasmė didinti x_1 einant nuo vieno atraminio sprendinio prie kito, kur $x_1 \neq 0$, o vietoj jo nuliui lygus kitas laisvasis kintamasis, kuris iki šiol buvo bazinis kintamasis.

Didinti x_1 galima tik tol, kol netampa neigiami kurie nors kiti baziniai kintamieji $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$.

Nagrinėjame, kurioje iš bazinių lygčių kintamojo koeficientas x_1 yra neigiamas. Jei tokios lygties nėra, tai x_1 galima didinti neribotai. Vadinasi, kriterijus L neribotas iš apačios, todėl uždavinys optimalaus sprendinio neturi.

Tarkime, kad kai kuriose bazinėse lygtyse x_1 koeficientai neigiami. Didinti kintamąjį x_1 šiose lygtyse galima tol, kol tie kintamieji tampa lygūs nuliui. Imkime kokią nors lygtį, kurioje x_1 koeficientas yra neigiamas. Sakykime, tai s lygtis

$$x_s = a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + ... + a_{sk}x_k + \beta_s .$$

Kadangi $\beta_s \geq 0$, tai didinti x_1 koeficientą galima iki dydžio $\left(\dfrac{-\beta_s}{a_{s1}}\right)$.

Apskaičiuojame visus tokius santykius bazinėse lygtyse, kurių koeficientas x_1 neigiamas. Surandame tą lygtį, kurioje šis santykis yra mažiausias, t. y. $(-\beta_s/a_{s1})$ mažiausias. Tarkime, kad tokia lygtis yra su indeksu r. Šiuo atveju vietoj x_1 laisvojo kintamojo tikslinga imti x_r , o x_1 pervesti į bazinių kintamųjų aibę. Šitaip išvengiama situacijų, kai keičiant laisvuosius ir bazinius kintamuosius vietomis neatsiranda nė vieno neigiamo kintamojo.

Taip pereinama nuo vieno atraminio sprendinio, kai

$x_1 = x_2 = ... = x_k = 0$, prie kito, kai $x_2 = ... = x_k = x_r = 0$.

Visus bazinius kintamuosius ir tikslo funkciją išreiškiame naujais kintamaisiais. Jeigu visi koeficientai, tikslo funkcijoje esantys prie laisvųjų kintamųjų, teigiami, galime teigti, kad rastas optimalus sprendinys, atitinkantis atvejį, kai visi nauji laisvieji kintamieji lygūs nuliui.

Jei tikslo funkcijos kurie nors laisvųjų kintamųjų koeficientai yra neigiami, tai ta pati procedūra kartojama. Taip daroma tol, kol randamas optimalus sprendinys.

Uždavinys 1.6. Reikia minimizuoti funkciją $L = 10x_1 - 4x_3$, esant tokiems apribojimams:

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4 , \\ x_1 + x_3 - x_4 \leq 9, \\ -2x_1 + 4x_4 \leq 3. \end{cases}$$

Sprendimas. Standartizuojame šias funkcijas, t. y. iš nelygybių padarome lygybes. Tuo tikslu pasirenkami papildomi kintamieji y_i, kurie taip pat turi būti neneigiami:

$$y_1 = 4 + 3x_1 - 2x_2 - x_3 ,$$
$$y_2 = 9 - x_1 - x_3 + x_4 ,$$
$$y_3 = 3 + 2x_1 - 4x_4 .$$

Bendras kintamųjų skaičius $n = 7$ ($x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ y_1,\ y_2,\ y_3$), o ribinių lygčių skaičius $m = 3$. Vadinasi, $n - m = 4$ kintamieji gali būti pasirinkti laisvaisiais $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$.

Tarkime, kad šie laisvieji kintamieji $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. Tada $y_1 = 4$, $y_2 = 9$; $y_3 = 3$, $L_1 = 0$. Kadangi visi $y_I > 0$, iš karto radome atraminį sprendinį. Jis nėra optimalus, nes į tikslo funkciją įeina x_3, kurio koeficientas yra neigiamas.

Kintamieji y_1 ir y_2 priklauso nuo x_3, kurio koeficientas neigiamas. Ieškome, iki kokio dydžio galima didinti kintamąjį x_3.

Iš pirmos lygties $0 = 4 + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - x_3$ nustatome, kad $x_3 = 4$.

Iš antros lygties $0 = 9 - 0 - x_3 + 0$ apskaičiuojame, kad $x_3 = 9$.

Mažesnis iš jų dydis yra $x_3 = 4$. Vadinasi, x_3 ir y_1 reikia sukeisti vietomis, t. y. nauji laisvieji kintamieji yra $x_1,\ x_2,\ x_4,\ y_1,$ nauji baziniai kintamieji – $x_3,\ y_2,\ y_3$. Iš pirmos lygties išreiškiame x_3. Gauname:

$$x_3 = 4 + 3x_1 - 2x_2 - y_1.$$

Iš antros lygties

$$y_2 = 9 - x_1 - 4 - 3x_1 + 2x_2 + y_1 + x_4 = 5 - 4x_1 + 2x_2 + y_1 + x_4.$$

Trečioji ribinė lygtis nesikeičia, t. y.

$$y_3 = 3 + 2x_1 - 4x_4.$$

Kriterijus $L = 10x_1 - 4 \cdot (4 + 3x_1 - 2x_2 - y_1) = -16 - 2x_1 + 8x_2 + 4y_1$.

Taigi suradome kitą atraminį sprendinį. Jis jau geresnis, nes kai laisvieji kintamieji lygūs nuliui, $L_2 = -16$, o buvo $L_1 = 0$.

Šis sprendinys dar nėra optimalus, nes funkcija L priklauso nuo x_1 su neigiamu ženklu.

Iš naujų bazinių lygčių tik y_2 priklauso nuo x_1 , kurio koeficientas neigiamas, todėl y_2 reikia paskelbti laisvai pasirenkamu kintamuoju, o x_1 – baziniu. Vadinasi, nauji laisvieji kintamieji yra $x_2,\ x_4,\ y_1,\ y_2$, o nauji baziniai – $x,\ x_3,\ ir\ y_3$.

Iš antrosios lygties apskaičiuojame x_1 ir išreiškiame naujus bazinius kintamuosius laisvaisiais kintamaisiais

$$x_1 = 0{,}25\ (5 + 2x_2 + y_1 + x_4 - y_2),$$
$$x_3 = 7{,}75 - 0{,}5x_2 + 0{,}75x_4 - 0{,}25y_1 - 0{,}75y_2,$$
$$y_3 = 5{,}5 + x_2 - 3{,}5x_4 + 0{,}5y_1 - 0{,}5y_2.$$

Kriterijus $L = -18{,}5 + 3{,}5y_1 + 0{,}5y_2 + 7x_2 - 0{,}5x_4$.

Tarkime, nauji laisvieji kintamieji $x_2 = y_1 = y_2 = x_4 = 0$. Tuomet $L = -18{,}5$.

Šis sprendinys dar nėra optimalus, nes laisvojo kintamojo x_4 koeficientas lygtyje L yra neigiamas. Sukeitę kintamuosius y_3 ir x_4 vietomis, gauname optimalų sprendinį. Optimalus sprendinys yra toks:

$x_1^* = 1{,}64$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 8{,}93$, $x_4^* = 1{,}57$; $y_1^* = 0$, $y_2^* = 0$, $y_3^* = 0$, $L_{min} = -19{,}3$.

Buvo nagrinėtas atvejis, kai atraminis sprendinys buvo rastas iš karto, nes bazinių lygčių laisvieji koeficientai buvo teigiami. Bendruoju atveju jie gali nebūti teigiami, todėl tenka ieškoti atraminio sprendinio keičiant laisvuosius ir bazinius kintamuosius vietomis. Šiuo tikslu yra sukurtas specialus algoritmas, pagal kurį visi skaičiavimo veiksmai atliekami greitai ir tiksliai.

Taigi tiesinio programavimo uždavinys gali būti padalytas į dvi dalis: 1) atraminio sprendinio paieška, 2) optimalaus sprendinio radimas. Sprendžiant pirmą šio uždavinio dalį išsiaiškinama, ar iš viso egzistuoja to uždavinio sprendinys. Jei toks sprendinys egzistuoja, randamas atraminis sprendinys, kurio visi laisvieji kintamieji lygūs nuliui, o baziniai neneigiami. Sprendžiant antrą šio uždavinio dalį išsiaiškinama, ar kriterijus L apribotas iš apačios. Abi šio uždavinio dalis galima spręsti naudojantis standartizuotomis lentelėmis.

Savitikros užduotys

1. Teoriniai klausimai:

1.1. Apibūdinkite simpleksų metodo esmę.

1.2. Kada rastas sprendinys yra optimalus?

1.3. Kokiu principu remiantis bazinis ir laisvasis kintamasis keičiami vietomis?

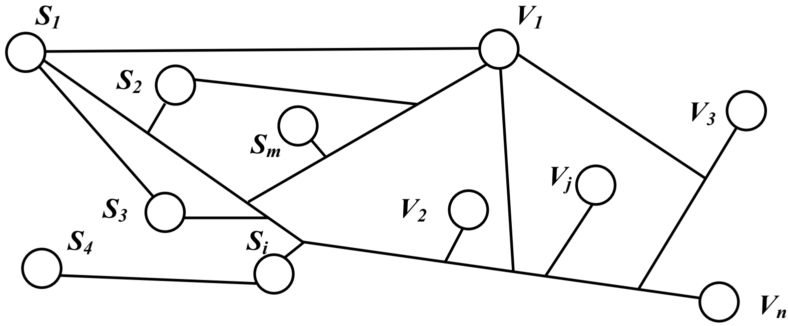
2. Praktinė užduotis:

2.1. Spręsdami šio skyrelio uždavinį 1.6 atlikite visus būtinus veiksmus.

1.7. Transporto uždavinys

Uždavinys 1.3. Prekių vežimas

Yra m sandėlių $S_1,\ S_2,\ \dots\ ,\ S_m$ ir n vartotojų punktų $V_1,\ V_2,\ \dots\ ,\ V_n$ (6 pav.).



6 pav. **Kelių tinklas, jungiantis sandėlius ir vartotojus**

Prekių atsargų kiekiai sandėliuose $a_1,\ a_2,\ \dots\ ,\ a_m$.

Vartotojai pateikė paraiškas tokių prekių kiekių: $b_1,\ b_2,\ \dots\ ,\ b_n$.

Paraiškos gali būti patenkintos, nes pageidaujamų prekių kiekis yra sandėliuose, t. y.

$$\sum_{j=1}^{n} b_j \le \sum_{i=1}^{m} a_i .$$

Sandėliai ir vartotojai sujungti kelių tinklu. Vienos prekės vežimas iš sandėlio S_i į punktą V_j kainuoja c_{ij} litų.

Reikia sudaryti prekių pristatymo planą, t. y. nurodyti, iš kurio sandėlio, kuriam vartotojui ir kiek reikia atvežti prekių, kad vežimo išlaidos būtų minimalios.

Uždavinio formulavimas. Pažymėkime x_{ij} prekių kiekį, vežamą iš sandėlio S_i vartotojui V_j.

Pervežimo planas turi $m \times n$ kintamųjų

$x_{11},\ x_{12},\ \dots\ ,\ x_{1n},$

$x_{21},\ x_{22},\ \dots\ ,\ x_{2n},$

....

$x_{m1},\ x_{m2},\ \dots\ ,\ x_{mn},$

kurie sudaro stačiakampę matricą.

Reikia parinkti tokius neneigiamus kintamuosius x_{ij}, kad būtų įvykdytos šios sąlygos:

1. Bendras prekių kiekis, paimtas iš kiekvieno sandėlio, neturi viršyti ten esančio kiekio:

$$\begin{aligned} &x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} \le a_1, \\ &x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} \le a_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} \le a_m. \end{aligned} \tag{1}$$

2. Paraiškos turi būti patenkintos:

$$\begin{aligned} &x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = b_1, \\ &x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} = b_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = b_n. \end{aligned} \tag{2}$$

Vežimo kaina (kriterijus)

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}\,. \tag{3}$$

Šį kriterijų reikia minimizuoti.

Matome, kad ribinės funkcijos ir kriterijus yra tiesinės funkcijos.

Šis uždavinys skiriasi nuo bendrojo atvejo tuo, kad visi visų kintamųjų koeficientai ribinėse lygtyse lygūs ***vienetui.*** Be to, laisvųjų kintamųjų skaičius yra lygus $(m - 1) \cdot (n - 1)$. Vadinasi, bent $(m - 1) \cdot (n - 1)$ kintamųjų x_{ij} lygūs nuliui.

Bet koks derinys x_{ij} ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$) vadinamas vežimo planu.

Bet koks planas galimas, jeigu įvykdytos visos ribinės sąlygos. Optimalus planas – toks, kurio bendra krovinių vežimo kaina kuo mažesnė. Sudaroma transporto lentelė (5 lent.), kurios viršutiniame kiekvieno langelio kampe nurodoma vieno krovinių vieneto vežimo kaina iš sandėlio i į punktą j – c_{ij}. Be to, kiekvieno iš tų langelių centre didesniais skaičiais užrašomi vežamų krovinių kiekiai xij, turintys atitikti tokias sąlygas:

1) vežimų suma kiekvienoje eilutėje turi būti lygi sandėlio atsargų kiekiui;
2) vežimų suma kiekviename stulpelyje turi būti lygi paraiškų kiekiui;
3) atsargų suma paskutiniame stulpelyje turi būti lygi paraiškų sumai paskutinėje eilutėje.

5 lentelė. **Bazinė transporto lentelė**

Sandėliai	Punktai				Atsargos a_i
	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	a_2
$\vdots$	...	...	...	...	$\vdots$
A_{m1}	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	a_m
Paraiškos b_j	b_1	b_2	...	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Šis uždavinys visada turi sprendinį, kuris būtinai yra optimalus.

Iš pradžių reikia sudaryti **atraminį (pradinį) planą**, paskui tam tikru būdu gerinti atraminį ir kitus planus, kad būtų rastas optimalus sprendinys.

Yra keli būdai sudaryti atraminį planą. Paprasčiausias yra vadinamasis **„šiaurės vakarų kampo“** būdas. Jo esmė yra tokia. Paskyrimo punkto paraiškos tenkinamos pradedant nuo pirmo sandėlio. Pasibaigus visoms pirmo sandėlio atsargoms, paraiškos tenkinamos iš antro sandėlio ir t. t. Krovinių gabenimo kiekius x_{ij} rašome į atitinkamus langelius. Užpildę visą lentelę, randame **atraminį sprendinį**. Jo kaina apskaičiuojama pagal (3) formulę.

Atraminis sprendinys beveik niekada nėra optimalus. Norint rasti optimalų sprendinį, reikia kryptingai eiti nuo vieno prie kito atraminio sprendinio tikslo funkcijos mažėjimo link. Tokie perėjimai galimi atliekant pakeitimų ciklus.

Ciklu vadinama keletas langelių, sujungtų uždara laužtine linija, kuri kiekviename iš tokių langelių pasukama 90^0 kampu. Kiekviename cikle yra lyginis viršūnių skaičius. Viršūnės žymimos pliuso ženklu, jei tame langelyje vežimų daugėja, ir minuso, jei mažėja. Perkelti tam tikrą kiekį krovinių vienetų cikle reiškia pridėti vežimų langeliuose su pliusu ir tiek pat jų sumažinti langeliuose su minusu. Todėl pusiausvyra tarp paraiškų ir atsargų nesikeičia.

Taigi gaunamas naujas galimas planas. Šio plano kaina yra kitokia.

Ciklo kaina (γ) vadinama vieno krovinio vieneto padidėjimo (sumažėjimo) kaina keičiant krovinių vežimų skaičių cikle. Ji lygi ciklo viršūnėse esančių kainų sumai su pliuso ženklu, jei viršūnė teigiama, ir minuso ženklu, jei ji neigiama.

Gali būti sudaryti bet kurio krovinių gabenimo lentelės langelio pakeitimų ciklai. Ciklus tikslinga sudaryti ir nagrinėti pradedant laisvais langeliais, kuriuose pažymėta mažiausia vieno krovinio vieneto vežimo kaina. Pasirinktas langelis pažymimas pliuso ženklu, reiškiančiu, kad vežimų skaičius bus didinamas. Sudarome ciklo laužtę ir pažymime visas jos viršūnes vadovaudamiesi taisykle, kad ženklai gretimose viršūnėse turi būti skirtingi. Jei apskaičiuota šio ciklo kaina γ yra neigiama, tai sukeitę vietomis tam tikrą laisvąjį ir bazinį kintamuosius sudarome geresnį vežimo planą, kuriame bendra krovinių gabenimo kaina sumažėja $k\gamma$ dydžiu. Krovinių vienetų kiekis k, kurį galima keisti cikle, nustatomas išnagrinėjus šio ciklo langelius su neigiamu ženklu ir pasirinkus mažiausią krovinių kiekį iš esančių tuose langeliuose. Taip pasiekiama, kad nė vienas kintamasis netaptų neigiamas.

Naujas krovinių vežimo planas sudaromas atėmus iš ciklo viršūnėse esančių krovinių gabenimo reikšmių k vienetų, jei ši viršūnė pažymėta minuso ženklu, ir pridėjus k vienetų, jei ciklo viršūnė pažymėta pliuso ženklu. Šio naujo krovinių gabenimo plano kaina

$$L_2 = L_1 + k\gamma;$$

čia L_2 – nauja krovinių gabenimo plano kaina; L_1 – buvusi iki pakeitimų pasirinktame cikle krovinių gabenimo plano kaina.

Jei nagrinėjamo ciklo kaina yra teigiama, jis atmetamas kaip nenaudingas.

Išnagrinėsime tiesinio programavimo uždavinio sprendimą taikydami lentelių būdą konkrečiu atveju.

Uždavinys 1.7. Tarkime, sudaryta transporto lentelė (6 lent.). Reikia sudaryti optimalų (pigiausią) krovinių vežimo planą.

6 lentelė. **Bazinė transporto lentelė**

Sandėliai	Punktai					Atsargos a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	6	7	8	5	**45**
A_2	8	7	9	4	4	**20**
A_3	10	9	7	6	5	**55**
A_4	4	5	6	10	8	**50**
Paraiškos b_j	**20**	**20**	**30**	**40**	**60**	**170**

Sprendimas. Taikome „šiaurės vakarų kampo“ būdą (7 lent.).

Planuojame samprotaudami šitaip. Užsakovas B_1 užsisakė 20 vienetų. Užsakymą atliksime iš sandėlio A_1 . Užsakovas B_2 taip pat užsisakė 20 vienetų. Šį užsakymą įvykdysime taip pat iš sandėlio A_1 . Užsakovas B_3 užsisakė 30 vienetų. Jam paskirsime likusius 5 vienetus iš pirmo sandėlio, visas atsargas (20 vienetų) iš sandėlio A_2 ir dar reikiamus 5 vienetus iš sandėlio A_3 .

Užsakovas B_4 pageidauja 40 vienetų. Skiriame juos iš sandėlio A_3 .

Užsakovas B_5 prašo 60 vienetų. Skiriame 10 vienetų iš sandėlio A_3 ir 50 vienetų iš sandėlio A_4 .

Kiekvienas gauna tai, ką užsisakė. Tai reiškia, kad vežimo planas iš karto sudarytas. Šis sprendinys yra atraminis. Jis pažymėtas tuose lentelės langeliuose, kuriuose žymimų vežamų krovinių kiekiai atitinka reikalavimą $m + n - 1 = 4 + 5 - 1 = 8$.

Kiti langeliai – tušti, jų $(n - 1) \cdot (m - 1) = (5 - 1) \cdot (4 - 1) = 12$.

Kadangi šie du reikalavimai įvykdyti, laikoma, kad atraminis sprendinys rastas.

7 lentelė. **Atraminis sprendinys ir pirmas pakeitimų ciklas**

Sandėliai	Punktai					Atsargos a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	**20**$^{-10}$	**20**^{6}	**5**$^{+7}$	8	5	**45**
A_2	+8	7	**20**$^{-9}$	4	4	**20**
A_3	10	9	**5**^{7}	**40**^{6}	**10**^{5}	**55**
A_4	4	5	6	10	**50**^{8}	**50**
Paraiškos b_j	**20**	**20**	**30**	**40**	**60**	**170**

Bet šis sprendinys nėra optimalus. Mes nekreipėme dėmesio į vežimų kainas c_{ij}. Atraminio sprendinio apskaičiuotoji kaina

$$L_1 = 20 \cdot 10 + 20 \cdot 6 + 5 \cdot 7 + 20 \cdot 9 + 5 \cdot 7 + 40 \cdot 6 + 10 \cdot 5 + 50 \cdot 8 = \\ = 1260 \text{ Lt} .$$

Šį atraminį sprendinį galima patobulinti: 20 vienetų iš langelio (1; 1)* perkelti į langelį (2; 1) ir, kad nebūtų pažeistos ribinės sąlygos (krovinių pervežimo balansas), 20 vienetų iš langelio (2; 3) perkelti į langelį (1; 3). Tai naujas sprendinys (8 lent.).

* Langeliai žymimi taip: (1; 1) – pirma eilutė, pirmas stulpelis; (2; 3) – antra eilutė, trečias stulpelis ir t. t.

8 lentelė. **Pirmas patobulintas sprendinys**

Sandėliai	Punktai					Atsar-gos a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	**20** 6	**25** 7	8	5	**45**
A_2	**20** 8	7	9	4	4	**20**
A_3	10	9	**5** 7	**40** 6	**10** 5	**55**
A_4	4	5	6	10	**50** 8	**50**
Paraiškos b_j	**20**	**20**	**30**	**40**	**60**	**170**

Naujo sprendinio apskaičiuotoji kaina

$L_2 = 20 \cdot 6 + 25 \cdot 7 + 20 \cdot 8 + 5 \cdot 7 + 40 \cdot 6 + 10 \cdot 5 + 50 \cdot 8 =$
$= 1180$ Lt,

t. y. net 80 Lt mažiau.

Baigtas vienas pakeitimų ciklas.

Nagrinėdami 9 lentelę matome, kad planą galima patobulinti, jei užpildysime laisvą langelį (4; 3), kuriame vieno krovinio vieneto vežimo kaina yra 6 Lt. Pažymime galimą ciklą rodyklėmis. Nustatyta tvarka viršūnes pažymime atitinkamais ženklais. Šio ciklo kaina

$\gamma = -7 + 6 - 8 + 5 = -4$ Lt.

Kadangi neigiamose viršūnėse yra 5 ir 50 krovinių vienetų, tai galima keisti tik 5 vienetus.

9 lentelė. **Antras pakeitimų ciklas**

Sandėliai	Punktai					Atsargos a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	**20** 6	**25** 7	8	5	**45**
A_2	**20** 8	7	9	4	4	**20**
A_3	10	9	**5** –7	**40** 6	**10** +5	**55**
A_4	4	5	+6	10	**50** –8	**50**
Paraiškos b_j	**20**	**20**	**30**	**40**	**60**	**170**

Naujo sprendinio (10 lent.) apskaičiuotoji kaina

$L_3 = 20 \cdot 6 + 25 \cdot 7 + 20 \cdot 8 + 40 \cdot 6 + 15 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 45 \cdot 8 = 1160$ Lt, o buvo 1180 Lt.

Atkreipiame dėmesį į 10 lentelės langelį (2; 5), kuriame vieno krovinio vieneto vežimo kaina yra mažiausia (4 Lt). Sudarome ciklą: (4; 5), (2;

5), (2; 1), (4; 1). Ciklo kaina $\gamma = 4 - 8 + 4 - 8 = -8$ Lt. Keisti galima 20 krovinių vienetų (mažiausias kintamasis iš 20 ir 45).

10 lentelė. **Antras patobulintas sprendinys ir trečias pakeitimų ciklas**

Sandė-liai	Punktai					Atsargos a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	**20** 6	**25** 7	8	5	**45**
A_2	**20** −8	7	9	4	+4	**20**
A_3	10	9	7	**40** 6	**15** 5	**55**
A_4	+4	5	~~**5**~~ 6	10	~~**45**~~ −8	**50**
Paraiš-kos b_j	**20**	**20**	**30**	**40**	**60**	**170**

Naujo sprendinio (11 lent.) apskaičiuotoji kaina

$L_4 = 20 \cdot 6 + 25 \cdot 7 + 20 \cdot 4 + 40 \cdot 6 + 15 \cdot 5 + 20 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + 25 \cdot 8 =$
$= 1000$ Lt, o buvo 1160 Lt.

11 lentelė. **Trečias patobulintas sprendinys ir ketvirtas pakeitimų ciklas**

Sandė-liai	Punktai					Atsargos a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	**20** 6	**25** −7	8	+5	**45**
A_2	8	7	9	4	**20** 4	**20**
A_3	10	9	7	**40** 6	**15** 5	**55**
A_4	**20** 4	5	5 +6	10	~~**25**~~ −8	**50**
Paraiš-kos b_j	**20**	**20**	**30**	**40**	**60**	**170**

Tačiau ir šis planas dar nėra optimalus. Žiūrime į 12 lentelės langelį (1; 5). Sudarome ciklą, pateiktą 12 lentelėje. Šio ciklo kaina $\gamma = 5 - 7 + 6 - 8 = -4$ Lt.

Galima keisti 25 vienetus.

Naujas sprendinys pateiktas 12 lentelėje.

12 lentelė. **Ketvirtas patobulintas sprendinys ir penktas pakeitimų ciklas**

Sandė-liai	Punktai					Atsargos a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	^{10}	**20** ^{6}	^{7}	^{8}	**25** ^{5}	**45**
A_2	^{8}	^{7}	^{9}	$^{+4}$	**20** $^{-4}$	**20**
A_3	^{10}	^{9}	^{7}	**40** $^{-6}$	**15** $^{+5}$	**55**
A_4	**20** ^{4}	^{5}	**30** ^{6}	^{10}	^{8}	**50**
Paraiš-kos b_j	**20**	**20**	**30**	**40**	**60**	**170**

Naujo sprendinio apskaičiuotoji kaina

$L_5 = 20 \cdot 6 + 25 \cdot 5 + 20 \cdot 4 + 40 \cdot 6 + 15 \cdot 5 + 20 \cdot 4 + 30 \cdot 6 = 900$ Lt, o buvo 1000 Lt.

Nagrinėjame 12 lentelės langelį (2; 4). Sudarome atitinkamą ciklą. Jo kaina $\gamma = +4 - 4 + 5 - 6 = -1$ Lt. Cikle galima keisti 20 krovinių vienetų.

Naujo sprendinio apskaičiuotoji kaina

$L_6 = 20 \cdot 6 + 25 \cdot 5 + 20 \cdot 4 + 20 \cdot 6 + 35 \cdot 5 + 20 \cdot 4 + 30 \cdot 6 = 880$ Lt, o buvo 900 Lt.

13 lentelė. **Penktas patobulintas sprendinys ir šeštas pakeitimų ciklas**

Sandė-liai	Punktai					Atsargos a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	^{10}	**20** $^{-6}$	$^{+7}$	^{8}	**25** ^{5}	**45**
A_2	^{8}	^{7}	^{9}	**20** ^{4}	^{4}	**20**
A_3	^{10}	^{9}	^{7}	**20** ^{6}	**35** ^{5}	**55**
A_4	**20** ^{4}	$^{+5}$	**30** $^{-6}$	^{10}	^{8}	**50**
Paraiš-kos b_j	**20**	**20**	**30**	**40**	**60**	**170**

Nagrinėjame 13 lentelės langelį (4; 2). Galimas ciklas (1; 2), (4; 2), (4; 3), (1; 3). Šio ciklo kaina $\gamma = 5 - 6 + 7 - 6 = 0$ Lt. Tai reiškia, kad yra dar vienas optimalus sprendimo variantas, kuris randamas perkėlus 20 vienetų nurodytame cikle (14 lent.).

14 lentelė. **Šeštas sprendinys**

Sandė-liai	Punktai					Atsargos
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	^{10}	^{6}	**20** ^{7}	^{8}	**25** ^{5}	**45**
A_2	^{8}	^{7}	^{9}	**20** ^{4}	^{4}	**20**
A_3	^{10}	^{9}	^{7}	**20** ^{6}	**35** ^{5}	**55**
A_4	**20** ^{4}	**20** ^{5}	**10** ^{6}	^{10}	^{8}	**50**
Paraiš-kos b_j	**20**	**20**	**30**	**40**	**60**	**170**

Po šio veiksmo būtina įsitikinti, kad visi kiti likusieji ciklai turi neneigiamą kainą. Vadinasi, optimalūs sprendiniai rasti ir jie yra tokie (13 ir 14 lent.):

$$x_{11}^* = x_{13}^* = x_{14}^* = x_{21}^* = x_{22}^* = x_{23}^* = x_{25}^* = x_{31}^* = x_{32}^* = x_{33}^* = x_{42}^* =$$
$$= x_{44}^* = x_{45}^* = 0,$$
$$x_{12}^* = 20\ ,\ x_{15}^* = 25\ ,\ x_{24}^* = 20\ ,\ x_{34}^* = 20\ ,\ x_{35}^* = 35,$$
$$x_{41}^* = 20\ ,\ x_{43}^* = 30,$$
$$L_{min} = 880 \text{ Lt},$$

arba

$$x_{11}^* = x_{12}^* = x_{14}^* = x_{21}^* = x_{22}^* = x_{23}^* = x_{25}^* = x_{31}^* = x_{32}^* = x_{33}^* = x_{44}^* =$$
$$= x_{45}^* = 0,$$
$$x_{13}^* = 20,\ x_{15}^* = 25,\ x_{24}^* = 20,\ x_{34}^* = 20,\ x_{35}^* = 35,$$
$$x_{41}^* = 20,\ x_{42}^* = 20,\ x_{43}^* = 10,$$
$$L_{min} = 880 \text{ Lt}.$$

Yra dar ir kitų optimalių variantų. Skaitytojams siūloma patiems juos surasti ir įsitikinti, kad bet kurio iš jų kaina L_{min} = 880 Lt. Matome, kad atraminio sprendinio kaina buvo 1260 Lt, t. y. optimalus sprendinys mažesnis už pirmąjį atraminį sprendinį net 30 proc.

Išnagrinėtas metodas dar vadinamas skirstomuoju. Jis tiesiogiai susijęs su langelių, kurių ciklo kaina neigiama, paieška.

Šis metodas turi tokių pranašumų:

1) lengvai randamas atraminis sprendinys;

2) nesunku rasti kitą geresnį sprendinį;

3) akivaizdus rezultatas;

4) visa skaičiavimo procedūra gali būti atlikta be specialių programų ir modelių;

5) lengvai nustatoma, kad optimalus sprendinys rastas.

Savitikros užduotys

1. Teoriniai klausimai:

1.1. Kada tiesinio programavimo uždavinius galima spręsti lentelių metodu?

1.2. Suformuluokite transporto uždavinį kaip tiesinio programavimo uždavinį.

1.3. Kaip randamas atraminis sprendinys?

1.4. Kaip galima nustatyti, ar rastas sprendinys yra optimalus?

1.5. Kaip apskaičiuojama bet kokio vežimo plano kaina?

1.6. Apibūdinkite pakeitimų ciklo sampratą.

1.7. Kokia tvarka apskaičiuojama ciklo kaina?

1.8. Kaip apskaičiuojama, kiek krovinių vienetų galima keisti cikle?

1.9. Kada tikslinga pereiti prie naujo pervežimo plano?

1.10. Ką reiškia, kad ciklo kaina yra lygi nuliui?

1.11. Kokie yra skirstomojo metodo pranašumai?

2. Praktinė užduotis:

2.1. Sudarykite 15 lentelės langelių (1; 4), (1; 5), (2; 3), (2; 4), (2; 5), (2; 6), (3; 1), (3; 2), (3; 6), (4; 1), (4; 2), (4; 3) pakeitimų ciklus.

15 lentelė.

Sandėliai	Punktai						Atsargos b_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	**20** 15	**10** 12	10	8	17	16	**30**
A_2	18	**30** 13	**10** 8	11	14	11	**40**
A_3	10	9	**20** 13	**15** 14	**15** 15	13	**50**
A_4	9	7	10	16	**10** 13	**20** 12	**30**
Paraiškos a_i	**20**	**40**	**30**	**15**	**25**	**20**	**150**

1.8. Transporto uždavinių sprendimas kompiuteriu

Norint išspręsti transporto uždavinį lentelių metodu, reikia numatyti, kur bus užrašyti visi reikalingi duomenys.

Veiksmų seką patogu nagrinėti pasitelkus konkretų pavyzdį.

Išspręsime uždavinį 1.7 kompiuteriu. Primename šio uždavinio sąlygas.

Yra 4 sandėliai (S_1, S_2, S_3, S_4) ir 5 vartotojai (V_1, V_2, V_3, V_4, V_5).

Kiekviename sandėlyje yra krovinių atsargos: $a_1 = 45$, $a_2 = 20$, $a_3 = 55$, $a_4 = 50$. Bendras kiekis visuose sandėliuose yra 170 vienetų.

Kiekvienam vartotojui reikia: $b_1 = 20$, $b_2 = 20$, $b_3 = 30$, $b_4 = 40$, $b_5 = 60$ krovinių vienetų. Tai vadinamosios vartotojų paraiškos.

Reikia patenkinti visas paraiškas ir pasiekti, kad bendra krovinių pristatymo kaina visiems vartotojams būtų kuo mažesnė.

Sprendimas. Būtina nustatyti, kiek kainuoja vieno krovinio vieneto pristatymas iš kiekvieno sandėlio kiekvienam vartotojui. Įvertinamas nuotolis tarp sandėlių ir vartotojų, transporto tipas, laikas ir kiti veiksniai. Tarkime, atlikus tokius vertinimus, apskaičiuotos išlaidos, būtinos norint pristatyti vieną krovinių vienetą iš konkretaus sandėlio pasirinktam vartotojui – c_{ij}. Čia indeksas i rodo sandėlio numerį, o indeksas j – vartotoją. Vieno vieneto krovinių pristatymo kainos pateiktos 16 lentelėje.

16 lentelė. **Vieno vieneto krovinių pristatymo kaina (koeficientai c_{ij})**

Sandėliai	Koeficientai c_{ij}				
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
S_1	$c_{11} = 10$	$c_{12} = 6$	$c_{13} = 7$	$c_{14} = 8$	$c_{15} = 5$
S_2	$c_{21} = 8$	$c_{22} = 7$	$c_{23} = 9$	$c_{24} = 4$	$c_{25} = 4$
S_3	$x_{31} = 10$	$c_{32} = 9$	$c_{33} = 7$	$c_{34} = 6$	$c_{35} = 5$
S_4	$c_{41} = 4$	$c_{42} = 5$	$c_{43} = 6$	$c_{44} = 10$	$c_{45} = 8$

Pažymime x_{ij} krovinių kiekį, kuris vežamas iš sandėlio S_i vartotojui V_j. Tokių kintamųjų šiuo konkrečiu atveju yra 20 (4×5).

Reikia nustatyti, koks krovinių pristatymo planas yra pigiausias, t. y. optimalias tų kintamųjų reikšmes.

Tai reiškia, kad reikia minimizuoti tokią funkciją:

$$L = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{21}x_{21} + \ldots = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij}.$$

Kintamieji x_{ij} turi atitikti dvi grupes reikalavimų:

1. Bendras krovinių kiekis, vežamas iš kiekvieno sandėlio, neturi viršyti ten esamų atsargų, t. y. turi būti teisingos nelygybės:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \le 45,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \le 20,$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} \le 55,$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} \le 50.$$

2. Bendras krovinių kiekis, atgabentas iš visų sandėlių kiekvienam vartotojui, turi atitikti paraiškoje nurodytą kiekį:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 20,$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 20,$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 30,$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 40,$$
$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 60.$$

Matome, kad yra 9 ribinės sąlygos.

Taikome „šiaurės vakarų kampo“ būdą, kuris padeda sudaryti atraminį (pradinį, vieną iš galimų) planą.

Tai parodyta 17 lentelėje.

17 lentelė. **Atraminis krovinių vežimo planas (kintamųjų x_{ij} reikšmės)**

Sandėliai	Kintamieji x_{ij}					Atsargos a_i
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	
S_1	$x_{11} = 20$	$x_{12} = 20$	$x_{13} = 5$	$x_{14} = 0$	$x_{15} = 0$	45
S_2	$x_{21} = 0$	$x_{22} = 0$	$x_{23} = 20$	$x_{24} = 0$	$x_{25} = 0$	20
S_3	$x_{31} = 0$	$x_{32} = 0$	$x_{33} = 5$	$x_{34} = 40$	$x_{35} = 10$	55
S_4	$x_{41} = 0$	$x_{42} = 0$	$x_{43} = 0$	$x_{44} = 0$	$x_{45} = 50$	50
Paraiškos b_j	20	20	30	40	60	170

Parengiamasis etapas baigtas.

Įjungiame Excel programą: Start; Microsoft Excel.

Kadangi kintamųjų yra net 20, patartina pažymėti langelius, kur įvedamos pradinės ir, išsprendus uždavinį, optimalios kintamųjų x_{ij} reikšmės:

1. Langeliuose C1:V1 užrašomi kintamųjų x_{ij} simboliai.

2. Langeliuose C2:V2 užrašomos tų kintamųjų x_{ij} reikšmės, kaip tai parodyta 18 lentelėje.

18 lentelė. **Kintamųjų x_{ij} išdėstymas langeliuose**

	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}=5	x_{14}	x_{15}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}
2	20	20	5	0	0	0	0	20	0	0

	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
1	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}	x_{45}
2	0	0	5	40	10	0	0	0	0	50

3. Langeliuose C3:G6 užrašomos koeficientų c_{ij} reikšmės:

19 lentelė. **Koeficientų c_{ij} reikšmių išdėstymas langeliuose**

	C	D	E	F	G
3	*10*	*6*	*7*	*8*	*5*
4	*8*	*7*	*9*	*4*	*4*
5	*10*	*9*	*7*	*6*	*5*
6	*4*	*5*	*6*	*10*	*8*

4. Langeliuose A3:A11 užrašomos: 1) atsargų ir 2) paraiškų reikšmės:

1) A3 – 45, A4 – 20, A5 – 55, A6 – 50;

2) A7 – 20, A8 – 20, A9 – 30, A10 – 40, A11 – 60.

5. Langeliuose B3:B11 užrašomos ribinių sąlygų formulės:

5.1. Susietos su atsargomis (langeliai B3:B6):

Langelyje B3: =C2+D2+E2+F2+G2. (Pasirodo skaičius 45)

Langelyje B4: =H2+I2+J2+K2+L2. (Pasirodo skaičius 20)

Langelyje B5: =M2+N2+O2+P2+Q2. (Pasirodo skaičius 55)

Langelyje B6: =R2+S2+T2+U2+V2. (Pasirodo skaičius 50)

5.2. Susietos su paraiškomis (langeliai B7:B11):
Langelyje B7: =C2+H2+M2+R2. (Pasirodo skaičius 20)
Langelyje B8: =D2+I2+N2+S2. (Pasirodo skaičius 20)
Langelyje B9: =E2+J2+O2+T2. (Pasirodo skaičius 30)
Langelyje B10: =F2+K2+P2+U2. (Pasirodo skaičius 40)
Langelyje B11: =G2+L2+Q2+V2. (Pasirodo skaičius 60)

6. Langelyje W2 užrašoma tikslo funkcijos formulė:
=C2*C3+D2*D3+E2*E3+F2*F3+G2*G3+H2*C4+I2*D4+J2*E4+K2*F4+L2*G4+M2*C5+N2*D5+O2*E5+P2*F5+Q2*G5+R2*C6+S2*D6+T2*E6+U2*F6+V2*G6.

Įvedus formulę, pasirodo skaičius 1260.

7. Įjungiamas sprendimo režimas: Tools; Solver.
Dialogo langelyje atliekami tokie veiksmai:

7.1. Set Target Cell: W2 (žymeklį uždėti ant langelio W2).
7.2. Pažymėti Min, nes norima minimizuoti tikslo funkciją.
7.3. By Changing Cells: C2:V2 (nuoroda į visus kintamuosius).
7.4. Add (nuorodos į ribines sąlygas):
- Cell Reference: B3:B11 (nuorodos į ribinių sąlygų formules);
- = (visose ribinėse sąlygose yra lygybės ženklai);
- Constraints: A3:A11 (nuorodos į langelius, kuriuose užrašyti ribinių sąlygų laisvieji nariai);
- OK.

7.5. Add (nuorodos, kurios įgyvendina reikalavimą, kad visi kintamieji būtų neneigiami):
- Cell Reference: C2:V2;
- >= 0;
- OK.

7.6 Add (nuorodos, kad visi kintamieji turi būti sveikieji skaičiai:
- Cell Reference: C2:V2;
- Integer;
- OK.

8. Solve; Keep Solver Solution; OK.

9. Užrašome sprendinį:

$$L = 880,$$
$$x_{12} = 15,\quad x_{13} = 5,\quad x_{15} = 25,\quad x_{24} = 20,\quad x_{34} = 20,$$
$$x_{35} = 35,\ x_{41} = 20,\ x_{42} = 5,\quad x_{43} = 25.$$

Uždavinys išspręstas.

Išvada. Pradinio krovinių vežimo plano kaina buvo 1260 Lt.

Sutaupyta 1260 – 880 = 380 Lt.

2 TEMA

DISKRETUSIS PROGRAMAVIMAS

2.1. Diskrečiojo programavimo uždaviniai

Diskrečiojo programavimo uždaviniai skiriasi nuo tiesinio programavimo uždavinių tuo, kad kai kurie kintamieji gali būti tik sveikieji skaičiai. Šie uždaviniai yra labai svarbūs, nes praktiniai poreikiai dažnai susieti su kokios nors įrangos, krovinių, laivų paskirstymu ar kitokiu jų panaudojimu. Tokie kintamieji gali būti tik sveikieji skaičiai.

Iš pirmo žvilgsnio atrodo, kad diskrečiojo programavimo uždaviniai yra paprastesni negu tiesinio. Taip atrodo todėl, kad tiesinio programavimo uždavinių kintamieji turi be galo daug reikšmių, o diskrečiojo programavimo uždaviniai susieti su kur kas mažesniu alternatyvų skaičiumi. Bet iš tikrųjų yra atvirkščiai. Šis faktas matyti net iš labai paprasto pavyzdžio. Tarkim, reikia maksimizuoti funkciją $L = 9x_1 + 4x_2$, esant tokiai ribinei funkcijai $4x_1 + 3x_2 \leq 11$, jei x_1 ir x_2 neneigiami sveikieji skaičiai.

Sprendinys randamas atrankos būdu, palyginus visus galimus variantus. Jų yra 9: 1) $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $L_1 = 0$; 2) $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $L_2 = 9$; 3) $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $L_3 = 18$; 4) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $L_4 = 4$; 5) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $L_5 = 8$; 6) $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $L_6 = 12$; 7) $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $L_7 = 13$; 8) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $L_8 = 17$; 9) $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $L_9 = 22$. Optimalus yra devintas variantas.

Spręsdami šį uždavinį tiesinio programavimo metodu, randame, kad optimalus sprendimas yra taške, kuriame $x_1 = 2{,}75$, $x_2 = 0$, $L = 24{,}75$. Atrodo, kad galima suapvalinti trupmeninę kintamojo x_1 reikšmę ir gauti optimalų sprendimą. Bet suapvalinus į didžiąją pusę ($x_1 = 3$), randamas negalimas sprendimas, o į mažąją ($x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $L = 18$) – žymiai blogesnis sprendimas.

Jei būtų galima apskaičiuoti visus variantus, tai ir sudėtinga teorija būtų nereikalinga. Tačiau galimas variantų skaičius gali būti toks didelis, kad tenka atsisakyti bandymo tai padaryti. Pavyzdžiui, vadinamasis komivojažieriaus (keliaujančio tarnautojo) uždavinys aplankyti n punktų tik po vieną kartą apsilankant kiekviename iš jų ir grįžti į pradinį punktą tokiu būdu, kad bendras maršruto ilgis būtų minimalus, turi $(n - 1)!$ skirtingų maršrutų sprendimų. Jei bendras punktų skaičius lygus 10, tai galimų maršrutų skaičius yra 362880.

Jeigu sprendžiamas optimalus n gaminių paskirstymas apdoroti k staklių, tai bendras galimų variantų skaičius lygus $(n!)^k$.

Iš šių pavyzdžių matosi, kad sprendimų paieška įvertinant visus galimus variantus įmanoma tik esant labai paprastoms situacijoms. Todėl reikalingi specialūs metodai, kurie leistų kryptingai ieškoti sprendimo. Kryptinga paieška reiškia, kad vietoj visų variantų įvertinimų reikia rasti būdų, kurie leistų įvertinti tik nedidelę variantų dalį tiesiogiai, kitus įvertinant netiesiogiai. Spręsdami tiesinio programavimo uždavinius mes išnagrinėjome simpleksų metodą, kuris visiškai atitinka šį reikalavimą, kai kintamieji nėra sveikieji skaičiai. Gaila, bet dar nerastas analogiškas metodas spręsti diskrečiojo programavimo uždavinius. Todėl tenka pasirinkti kokį nors iš turimų metodų, kuris labiausiai tinka tos klasės uždaviniams. Kiekvieno iš tų metodų efektyvumas vertinamas empiriškai.

2.2. Diskrečiojo programavimo uždavinių sprendimo metodai

Žinomi du pagrindiniai būdai tiksliam diskrečiojo programavimo uždavinių sprendimui ieškoti.

Vienas iš jų vadinamas atkirtimo, kitas – grįžtamuoju metodu.

Iš grįžtamųjų metodų labiausiai populiarus šakų ir rėžių metodas. Jo pagrindinė idėja paremta kryptingu galimų sprendinių radimu ir jų reikšmių palyginimu. Galimų sprendinių visuma dalijama į kelias dalis (šakas). Kiekvienoje iš tų dalių įvertinamos tikslo funkcijų reikšmių ribos (rėžiai). Šaka, kurioje tikslo funkcijų rėžis yra arčiau optimalaus, dalijama toliau, kol bus rastas vienintelis sprendinys.

Be minėtų metodų, yra nemažai artutinių diskrečiojo programavimo uždavinių sprendimo būdų. Nors šiuo atveju uždavinio sprendimas nėra tikslus, bet jis gali būti priimtinesnis, nes randamas žymiai greičiau, kainuoja pigiau ir, be to, gali būti įvertinti kiti veiksniai, kurie formuluojant uždavinį buvo atmesti. Pavyzdžiui, sprendžiant komivojažieriaus uždavinį tiksliaisiais metodais neatsižvelgiama į tai, kokiu paros laiku tarnautojas atvyksta į kokį nors miestą, kiek laiko jis turi laukti susitikimo su numatytais asmenimis, kur ir kaip jis gali pavalgyti, pailsėti ir t. t.

Pasirenkant vieną iš minėtų diskrečiojo programavimo uždavinių sprendimo būdų atsižvelgiama į turimą laiką bei ekonominę optimalaus sprendimo reikšmę. Svarstant perspektyvius svarbius ūkinės veiklos klausimus, rekomenduotini tikslieji metodai, sprendžiant kasdienines ar neilgą laiko tarpą apimančias problemas taikomi artutiniai metodai.

Formuluojant programavimo uždavinius, verta atsižvelgti į tai, kad diskretieji kintamieji labai apsunkina optimalaus sprendinio paiešką. Vadinasi, kur įmanoma, kad kai kurie kintamieji vietoj diskrečiųjų būtų tolydūs, reikia padaryti atitinkamus pakeitimus. Galimas ir dar vienas optimalaus sprendinio paieškos būdas, jei diskretus yra tik vienas kintamasis ir jis turi nedaug reikšmių. Tada formuluojama tiek tiesinio programavimo uždavinių, kiek reikšmių gali turėti šis diskretusis kintamasis. Simpleksų metodu ar kitais tiesinio programavimo metodais randami visų šių uždavinių sprendiniai ir pasirenkamas geriausias iš jų. Šis būdas gali būti praktiškai naudingas dar ir todėl, kad tokio uždavinio sprendimo algoritmas yra paprastesnis ir jį lengviau pritaikyti uždavinius sprendžiant kompiuteriu.

2.3. Šakų ir rėžių metodo taikymas

Kad lengviau suprastume šio metodo esmę, taikysime jį spręsdami konkretų uždavinį.

Uždavinys 2.1. Tarkim, Lietuvos Respublikos priešlėktuvinės gynybos sistemos reikmėms planuojama įsigyti zenitinių raketų komplektų.

Pasiūlyti dviejų zenitinių raketų komplektų tipai A ir B.

Iš valstybės biudžeto skirta 20 mln. Lt.

Vieno A komplekto kaina 4,5 mln. Lt, B – 0,15 mln. Lt.

Vienas A tipo zenitinių raketų komplektas gali pridengti iš oro 110 km^2 plotą, B tipo – 30 km^2. Visas saugotinų objektų šalyje plotas – 1000 km^2.

Tikimybė, kad A komplektas sunaikins oro taikinį, yra 0,9, B komplektas – 0,24.

Reikia nupirkti tiek tų komplektų, kad priešlėktuvinės gynybos efektyvumas būtų maksimalus.

*Sprendimas***.** Formuluojame uždavinį pasinaudodami formulėmis.

Pažymime: x_1 – A komplektų skaičių;

x_2 – B komplektų skaičių.

Žinomas biudžeto lėšų kiekis ir tų komplektų kainos leidžia parašyti pirmą ribinę nelygybę

$4500x_1 + 150x_2 \leq 20000,$

kuri reiškia, kad galima nagrinėti tik tuos variantus, kurie neviršija bendros sumos.

Kita ribinė nelygybė sudaroma norint patenkinti reikalavimą, kad būtų apsaugota visa teritorija, t. y.

$110x_1 + 30x_2 \geq 1000.$

Parenkame tikslo funkciją.

Priešlėktuvinės sistemos efektyvumas gali būti įvertintas skirtingais kriterijais, bet iš tų duomenų, kurie pateikti uždavinio sąlygoje, galima apskaičiuoti tik oro taikinių sunaikinimo vidurkį.

Šis kriterijus, kartu ir tikslo funkcija, kurią reikia maksimizuoti, yra toks: $L = 0{,}9x_1 + 0{,}24x_2$.

Abu kintamieji x_1 ir x_2 turi būti sveikieji skaičiai.

Uždavinys suformuluotas.

Įvedame papildomus kintamuosius, kad ribinės nelygybės virstų lygybėmis.

Formuluojame uždavinį.

Reikia maksimizuoti tikslo funkciją

$L = 0{,}9x_1 + 0{,}24x_2,$

esant tokioms ribinėms sąlygoms:

$x_3 = 400 - 90x_1 - 3x_2,$

$x_4 = 11x_1 + 3x_2 - 100;$

čia $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, x_1, x_2 – sveikieji skaičiai, x_3, x_4 – tolydieji skaičiai, $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$.

1 etapas. Sprendžiame šį uždavinį kaip tiesinio programavimo uždavinį, nekreipdami dėmesio į tai, kad kintamieji x_1 ir x_2 gali būti tik sveikieji skaičiai.

Pastebime, kad bendras kintamųjų skaičius $n = 4$ (x_1, x_2, x_3, x_4), o ribinių lygčių $m = 2$ (x_3, x_4), todėl $n - m = 2$, ir šį uždavinį galima spręsti grafiniu būdu (žr.1 pav.).

Sprendinys yra taške A, kuriame

$x_1^* = 0$, $x_2^* = 133{,}3$, $x_3^* = 0$, $x_4^* = 300$, $L^* = 32$.

Gautas sprendinys nėra sveikaskaitis, todėl reikia tęsti paiešką.

2 etapas. Gautą sprendinį reikia išnagrinėti kintamojo x_2 atžvilgiu, t. y. paskirstyti visą x_2 reikšmių sritį į dvi dalis:

1) $x_2 \leq 133,$
2) $x_2 \geq 134.$

Gauname dvi galimų sprendinių sritis.

Kiekvienoje iš tų sričių sprendžiame tiesinio programavimo uždavinius.

Pažymėkime tas sritis S1 ir S2.

Ieškome tiesinio programavimo uždavinio sprendinių srityje S1.

Reikia maksimizuoti tikslo funkciją

$L = 0{,}9x_1 + 0{,}24\ x_2$,

esant tokioms ribinėms sąlygoms:

$x_3 = 400 - 90x_1 - 3x_2$,

$x_4 = 11x_1 + 3x_2 - 100$,

$x_2 \leq 133$.

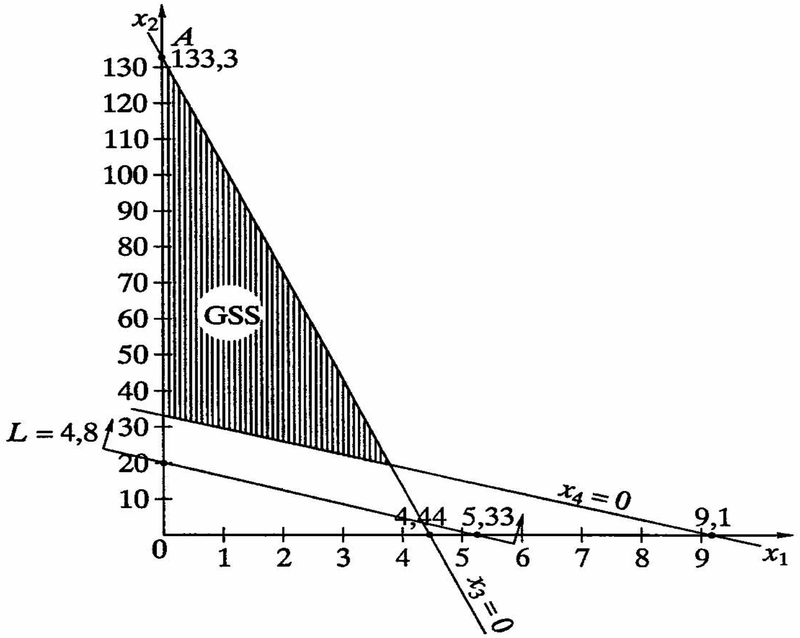
Sprendinys yra taške, kuriame susikerta dvi tiesės: $x_3 = 0$ ir $x_2 = 133$, ir jis lygus

$$x_1^* = \frac{1}{90},\ x_2^* = 133,\ L^* = 31{,}93.$$

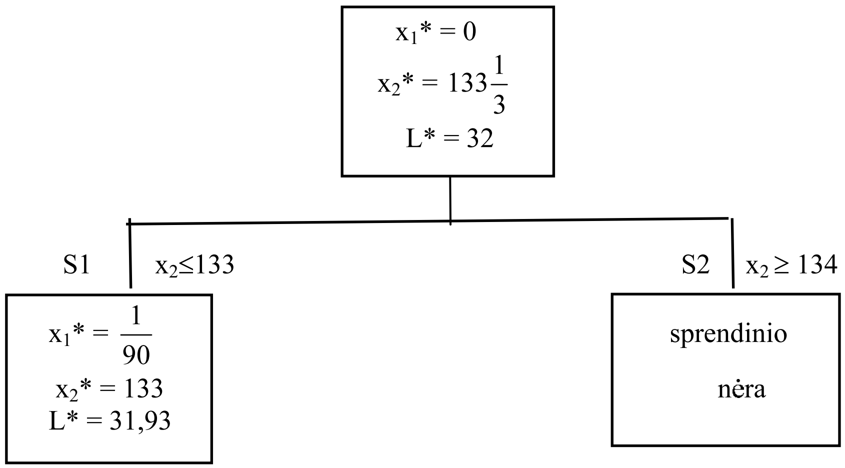
Ieškome tiesinio uždavinio sprendinio srityje S2.

Jis yra negalimas, nes $x_3 < 0$ šioje srityje ($x_3 = -3$).

Gautus sprendinius patogu pavaizduoti piešinyje. Piešinio viršūnėje pateikiamas pradinis tiesinio programavimo uždavinio sprendinys (2 pav.).



1 pav. **Pagrindinis tiesinio programavimo uždavinio sprendinys**



2 pav. **Uždavinio sprendiniai atlikus pirmą šakojimo procedūrą**

Tęsiame sprendinio paiešką, nes gautas tarpinis sprendinys nėra sveikaskaitis.

3 etapas. Dalijame galimų sprendinių sritį S1 į dvi dalis pirmojo kintamojo x_1 atžvilgiu. Pareikalausime, kad naujos galimų sprendinių sritys būtų tokios:

$$\text{S } 1.1\text{:}\;\; x_1 = 0,\;\; x_2 \le 133,$$
$$\text{S } 1.2\text{:}\;\; x_1 \ge 1,\;\; x_2 \le 133.$$

Gavome du tiesinio programavimo uždavinius.

Sprendžiame kiekvieną iš jų, atitinkantį galimų sprendinių sritį.

Pirmojo tiesinio programavimo uždavinio galimų sprendinių sritis yra S1.1.

Uždavinys formuluojamas taip.

Reikia maksimizuoti tikslo funkciją

$$L = 0{,}9x_1 + 0{,}24x_2,$$

esant tokioms sąlygoms:

$$x_3 = 400 - 90x_1 - 3x_2,$$
$$x_4 = 11x_1 + 3x_2 - 100,$$
$$x_1 = 0,\; x_2 \le 133.$$

Sprendinys yra tiesių $x_1 = 0$ ir $x_2 = 133$ susikirtimo taške:

$$x_1^* = 0,\ x_2^* = 133,\ L^* = 31{,}92.$$

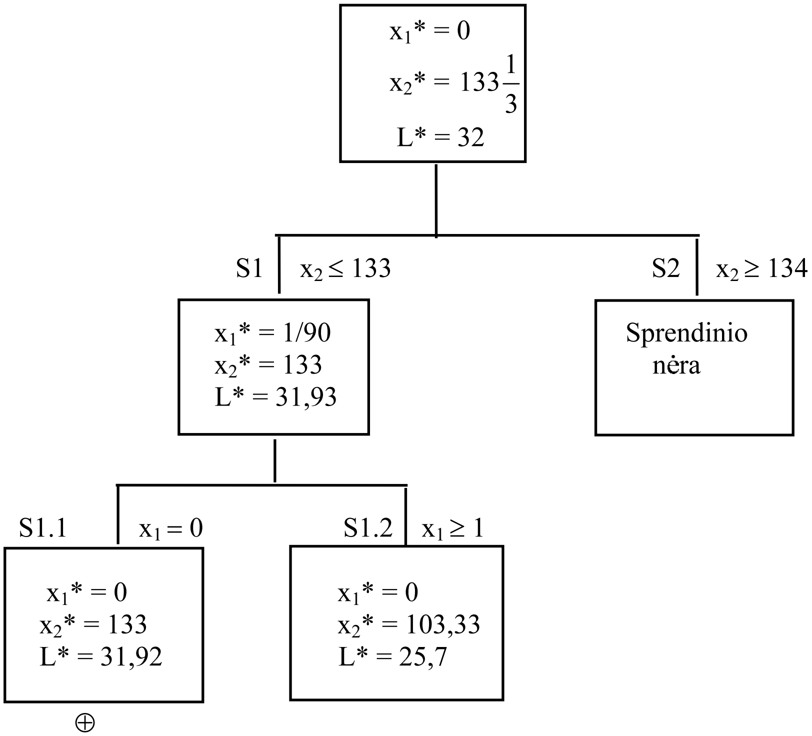
Gavome pirmą sveikaskaitį sprendinį.

Ieškome kitų sveikaskaičių sprendinių.

Ieškome tiesinio uždavinio sprendinio srityje S1.2.

Čia sprendinys yra taške, kuriame susikerta tiesės $x_1 = 1$ ir $x_3 = 0$, ir jis yra toks:

$$x_1^* = 1,\ x_2^* = 103{,}33,\ L^* = 25{,}7.$$



3 pav. **Uždavinio sprendiniai atlikus antrą šakojimo procedūrą**

4 etapas. Kadangi šis sprendinys nėra sveikaskaitis, S1.2 padalijame į dvi dalis kintamojo x_2 atžvilgiu. Pirmoji sritis – S1.2.1 ($x_2 \le 103$) ir antroji – S1.2.2 ($x_2 \ge 104$).

Siūlau studentams toliau spręsti šį uždavinį.

Optimalus sprendinys, kurio tikslo funkcija yra didžiausia, yra toks: $x_1* = 0$, $x_2* = 133$, $L* = 31{,}92$.

Grįžtame prie uždavinio pradžios ir darome išvadą, kad reikia įsigyti 133 tik B tipo komplektus ir nė vieno A tipo komplekto. Toks komplektų kiekis leidžia sukurti veiksmingiausią priešlėktuvinės gynybos sistemą iš tam skirtų lėšų – 20 mln. Lt.

Dabar tikslinga užrašyti sveikaskaičio sprendinio paieškos algoritmą.

1 etapas. Išspręsti šį uždavinį, nekreipiant dėmesio į tai, kad kai kurie kintamieji gali būti tik sveikieji skaičiai, t. y. išspręsti pagrindinį tiesinio programavimo uždavinį.

2 etapas. Jei 1 etape gautas sprendinys sveikaskaitis, tai jis yra optimalus ir uždavinys išspręstas.

3 etapas. Jei 1 etape gautas sprendinys nėra sveikaskaitis (taip būna beveik visada), reikia pasirinkti bet kurį iš trupmeninių kintamųjų, kuris turi būti sveikas skaičius, ir padalyti galimų sprendinių sritį į dvi dalis taip, kad pasirinkto kintamojo atžvilgiu ribos būtų du artimiausi sveikieji skaičiai, aprėpiantys tą kintamąjį iš abiejų pusių (pvz., jei $x_2* = 133\frac{1}{3}$, tai parenkami sveikieji skaičiai 133 ir 134).

4 etapas. Suformuluoti naujus tiesinio programavimo uždavinius kiekvienoje iš 3 etape nustatytų sričių. Reikia išspręsti tuos uždavinius kaip tiesinio programavimo uždavinius.

5 etapas. Pasirinkti bet kurį iš likusių trupmeninių kintamųjų ir padalyti galimų sprendinių sritį į dvi dalis taip, kaip tai buvo daroma 3 etape. Suformuluoti tiesinio programavimo uždavinius kiekvienoje iš tų sričių. Išspręsti tuos uždavinius kaip tiesinio programavimo uždavinius.

6 etapas. Sprendinių paiešką tęsti tol, kol yra bent viena šaka, turinti trupmeninį sprendinį. Nenagrinėti tų šakų, kurios sprendinio neturi (pvz., S2).

7 etapas. Visus sveikaskaičius sprendinius pažymėti ženklu ⊕. Iš jų išrenkamas tas sprendinys, kurio tikslo funkcija yra maksimali. Jis ir yra ieškomas optimalus sprendinys.

Išspręsime dar vieną uždavinį, suformuluotą 1 temoje (žr. uždavinį 1.1).

Uždavinys 1.1. Gamybos uždavinys

UAB „Langai ir durys“ gamina langus ir duris.

Turimos sandėlyje gamybinių medžiagų atsargos, gamybai reikiamas laikas, užsakymų atlikimo terminai ir gaunamas pelnas pateikti 1 lentelėje.

1 lentelė. **Pradiniai duomenys**

Rodiklis	Gaminys		Atsargos, terminas
	1 langas	1 durys	
Plastikas, kg	10	5	300
Stiklas, kg	5	4	200
Darbo sąnaudos, val.	15	10	600
Pelnas, Lt	30	20	

Reikia surasti tokį langų ir durų rinkinį, kuriam esant gaunamas maksimalus pelnas.

Šis uždavinys suformuluotas nagrinėjant 1 temą.

Pakartosime tik tą jo dalį, kuri reikalinga sprendžiant šį uždavinį.

Kintamieji x_1 – langų skaičius ir x_2 – durų skaičius turi būti sveikieji skaičiai.

Reikia padidinti UAB pelną, t. y. maksimizuoti tikslo funkciją

$$L = 30x_1 + 20x_2 \to \max,$$

esant tokiems apribojimams:

$$10x_1 + 5x_2 \le 300,$$
$$5x_1 + 4x_2 \le 200,$$
$$15x_1 + 10x_2 \le 600.$$

Įvedame papildomus kintamuosius, kad ribinės nelygybės virstų lygybėmis.

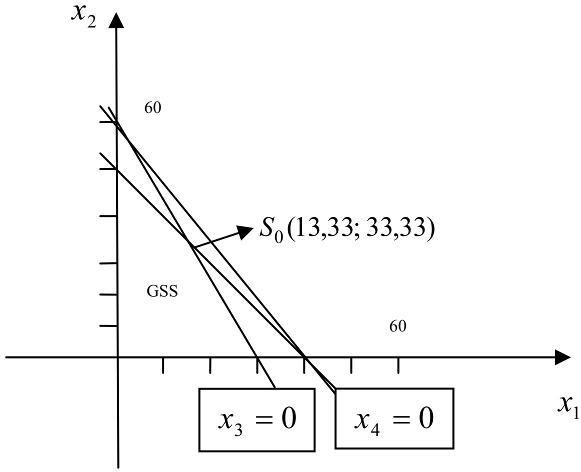
Šie papildomi kintamieji taip pat turi būti neneigiami, todėl ribinės lygtys įgyja tokią formą:

$$x_3 = 300 - 10x_1 - 5x_2,$$
$$x_4 = 200 - 5x_1 - 4x_2,$$
$$x_5 = 600 - 18x_1 - 10x_2.$$

Ieškome sprendinio, atlikdami visus veiksmus, aprašytus sprendinio paieškos etapuose.

1 etapas. Sprendžiame šį uždavinį kaip tiesinio programavimo uždavinį.

Nustatome galimų sprendinių sritį (4 pav.)



4 pav. **Pagrindinio tiesinio programavimo uždavinio sprendinys**

Sprendinys yra taške, kuriame susikerta tiesės x_3 = 0 ir x_4 = 0. To taško koordinatės nustatomos išsprendus lygčių sistemą:

$$0 = 300 - 10x_1 - 5x_2,$$
$$0 = 200 - 5x_1 - 4x_2.$$

Randame, kad sprendinys yra taške S_0. Šiame taške x_1 = 13,33, x_2 = 33,33.

Matome, kad abu kintamieji, kurie turi būti sveikieji skaičiai, tokie nėra.

Vadinasi, reikia tęsti sprendinio paiešką, atliekant anksčiau aprašytą šakojimo procedūrą.

2 etapas. Gautą sprendinį reikia išnagrinėti kintamojo x_1 atžvilgiu, t. y. paskirstyti visą to kintamojo reikšmių sritį į dvi dalis:

1) $x_1 \leq 13$,

2) $x_1 \geq 14$.

Gauname dvi galimų sprendinių sritis.

Kiekvienoje iš tų sričių sprendžiame tiesinio programavimo uždavinius.

Pažymėkime tas sritis S1 ir S2.

Ieškome tiesinio programavimo uždavinio sprendimų srityje S1.

Reikia maksimizuoti tikslo funkciją

$$L = 30x_1 + 20\ x_2,$$

esant tokioms ribinėms sąlygoms:

$$x_3 = 300 - 10x_1 - 5x_2,$$
$$x_4 = 200 - 5x_1 - 4x_2,$$
$$x_5 = 600 - 18x_1 - 10x_2,$$
$$x_1 \leq 13.$$

Išsprendę šį naują tiesinio programavimo uždavinį, nustatome x_1 = 13, x_2 = 33,75.

Matome, kad sprendinys dar nėra sveikaskaitis, todėl šioje šakoje teks tęsti jo paiešką.

Ieškome sprendinio galimų sprendinių srityje S2.

Formuluojame uždavinį.

Reikia maksimizuoti tikslo funkciją

$$L = 30x_1 + 20\ x_2,$$

esant tokioms ribinėms sąlygoms:

$$x_3 = 300 - 10x_1 - 5x_2,$$
$$x_4 = 200 - 5x_1 - 4x_2,$$
$$x_5 = 600 - 18x_1 - 10x_2,$$
$$x_1 \geq 14.$$

Išsprendę šį naują tiesinio programavimo uždavinį, nustatome x_1 = 14, x_2 = 32.

Gavome pirmą sveikaskaitį sprendinį.

Gaminant 14 langų ir 32 duris pelnas būtų 1060 Lt (L = 30 x 14 + 20 x 32).

Šis sprendinys gali nebūti geriausias, todėl reikia tęsti kitų sveikaskaičių sprendinių paiešką.

3 etapas. Dalijame galimų sprendinių sritį S1 į dvi dalis pirmojo kintamojo x_2 atžvilgiu. Pareikalausime, kad naujos galimų sprendinių sritys būtų tokios:

S3 dalis $x_2 \leq 33$,

S4 dalis $x_2 \geq 34$.

Formuluojame uždavinį GSS S3.

Reikia maksimizuoti tikslo funkciją

$$L = 30x_1 + 20\ x_2,$$

esant tokioms ribinėms sąlygoms:

$$x_3 = 300 - 10x_1 - 5x_2,$$
$$x_4 = 200 - 5x_1 - 4x_2,$$
$$x_5 = 600 - 18x_1 - 10x_2.$$
$$x_1 \leq 13,$$
$$x_2 \geq 33.$$

Išsprendę šį naują tiesinio programavimo uždavinį, nustatome $x_1 = 13$, $x_2 = 33$.

Gavome antrą sveikaskaitį sprendinį.

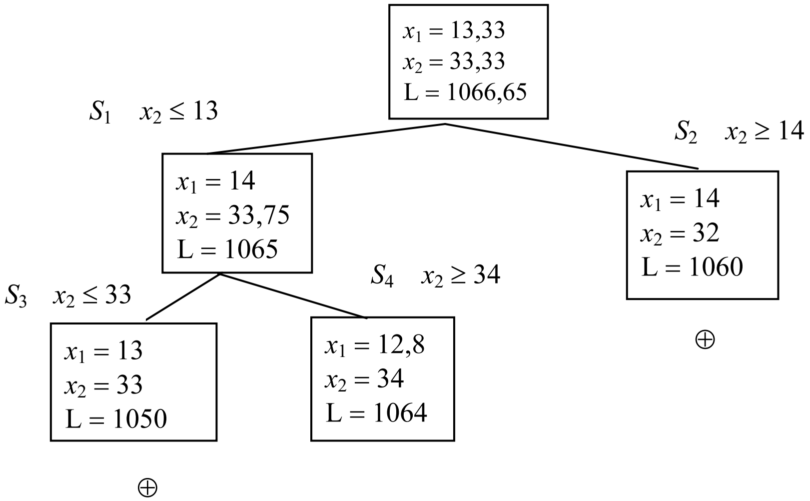
Gaminant 13 langų ir 33 duris pelnas būtų 1050 Lt (L = 30 x 13 + 20 x 33).

Matome, kad pirmasis sprendinys yra geresnis.

Sprendinių paiešką reikia tęsti tol, kol yra bent viena šaka, turinti trupmeninį sprendinį, nenagrinėti tų šakų, kurios sprendinio neturi.

Siūlome klausytojui tęsti sveikaskaičių sprendinių paiešką. Rasite dar vieną sprendinį: gaminti 12 langų ir 35 duris. Pelnas – 1060 Lt.

Sprendinių medis pateiktas 5 pav.



5 pav. **Sprendinių medis**

2.4. Diskrečiojo programavimo uždavinių sprendimas taikant kompiuterinę programą

Sprendžiame ką tik išnagrinėtą gamybos uždavinį 1.1.
Reikia maksimizuoti UAB pelną, t. y. maksimizuoti tikslo funkciją

$$L = 30x_1 + 20x_2 \to \max,$$

esant tokiems apribojimams:

$$10x_1 + 5x_2 \le 300,$$
$$5x_1 + 4x_2 \le 200,$$
$$15x_1 + 10x_2 \le 600.$$

Sprendimas. Uždavinys sprendžiamas simpleksų metodu, todėl nebūtina jį standartizuoti, išskirti laisvuosius ir bazinius kintamuosius, aiškintis, ar galima jį spręsti grafiniu būdu.

Vadinasi, nereikia atlikti minėtų veiksmų ir tai palengvina uždavinio sprendimą. Tačiau būtina labai tiksliai suvesti visus duomenis, priešingu atveju gaunamas neteisingas sprendimas arba nepateikiamas joks sprendimas.

Norint tiksliai atlikti visus veiksmus, pageidautina juos suskirstyti į atskirus žingsnius.

1. Įjungiame Excel programą: Start; Microsoft Excel.
2. Pasirenkame langelius, kuriuose užrašomos kintamųjų x_1, x_2 reikšmės. Norint išvengti painiavos, tikslinga pasirinkti dvi langelių eiles. Pirmoje (viršutinėje) užrašyti kintamųjų simbolius, antroje – jų reikšmes.

Tarkime, kintamųjų simbolius užrašysime langeliuose C1:D1, o jų reikšmes – langeliuose C2:D2, kaip tai parodyta 2 lentelėje. Pradinės kintamųjų reikšmės pasirinktos lygios nuliui.

2 lentelė. **Kintamųjų paskirstymas**

Nr.	C	D
1	x_1	x_2
2	0	0

3. Langeliuose C3:D5 užrašome ribinių sąlygų koeficientus, kaip tai parodyta 3 lentelėje.

3 lentelė. **Koeficientai prie kintamųjų ribinėse sąlygose**

Nr.	C	D
3	10	5
4	5	4
5	15	10

4. Langeliuose A3:A5 užrašome ribinių sąlygų laisvuosius narius (žr. 4 lentelę).

5. Langeliuose B3:B5 užrašome ribinių sąlygų apskaičiavimo formules, kaip tai parodyta 4 lentelėje.

4 lentelė. **Ribinių sąlygų laisvieji nariai (langeliai A3:A7) ir ribinių sąlygų apskaičiavimo formulės (langeliai B3:B5)**

Nr.	A	B
3	300	= C2* C3 + D2* D3
4	200	= C2* C4 + D2* D4
5	600	= C2* C5 + D2* D5

Pastaba. Langeliuose B3:B5 ir F2 turi pasirodyti nuliai, kai baigta rinkti formules, nes visi kintamieji yra lygūs nuliui.

6. Langelyje F2 (arba bet kokiame kitame langelyje) užrašome tikslo funkcijos apskaičiavimo formulę:

= 30* c2 + 20* d2.

7. Visi reikiami duomenys įvesti. Pavedame kompiuteriui spręsti šį uždavinį.

Tam reikia:

8. Įjungti sprendimo režimą: Tools; Solver. Dialogo langelyje atlikti tokius veiksmus:

8.1. Set Target Cell: F2 (žymeklį uždėti ant langelio F2).

8.2. Pažymėti Max, nes norima maksimizuoti tikslo funkciją.

8.3. By Changing Cells: C2:D2 (nuoroda į visus kintamuosius).

8.4. Add (nuorodos į ribines sąlygas):

- Cell Reference: B3:B5 (nuorodos į ribinių sąlygų formules);
- <= (visose ribinėse sąlygose yra tokie ženklai. Jei ribinių sąlygų ženklai yra skirtingi, reikia sugrupuoti tas sąlygas pagal bendrus ženklus ir įvesti duomenis atskirai);
- Constraints: A3:A5 (nuorodos į ribinių sąlygų laisvuosius narius);

•OK.

8.5. Add (nuorodos, kad visi kintamieji turi būti neneigiami):

•Cell Reference: C2:D2;

•>=;

•0;

•OK;

•Add;

•Cell Reference: C2:D2;

•Integer (nuoroda – kintamieji turi būti sveikieji sklaičiai);

•OK.

9. Solve; Keep Solver Solution; OK.

10. Skaitome sprendinį:

langelyje F2 – L =1060,

langelyje C2 – x_1 = 14, langelyje D2 – x_2 = 32.

Uždavinys išspręstas.

Akivaizdu, kad uždavinio sprendimas kompiuteriu yra paprastas ir tiesiog malonus.

Uždavinys 1.4. Slenkanti žemė

Norint sutvirtinti slenkantį šlaitą, nutarta apsodinti jį medeliais. Urėdas pasiūlė dviejų rūšių medelius. Visi duomenys parodyti 5 lentelėje.

5 lentelė. **Uždavinio parametrai**

Medelių rūšis	Medelių parametrai			Reikalavimai	
	Kaina, Lt	Šaknų plotis, kv. m.	Prigijimo tikimybė	Žemės plotas, kv. m.	Skirtos lėšos, Lt
1	**31**	**2**	**0,8**	**200**	**1500**
2	**19,5**	**3**	**0,4**		

Kiek ir kokių medelių reikia pirkti ir sodinti, norint sutvirtinti 200 kv. m. ploto šlaitą, jei tam skirta 1500 Lt ir siekiama, kad prigytų kuo daugiau medelių?

Uždavinio formulavimas.

Pažymime kintamuosius:

x_1 – pirmos rūšies medelių skaičius;

x_2 – antros rūšies medelių skaičius.

Tikslo funkcija:

$L = 0{,}8x_1 + 0{,}4x_2 \to \max.$

Ribinės sąlygos:

$31x_1 + 19{,}5x_2 \leq 1500,$

$2x_1 + 3x_2 \geq 200.$

Suvedus duomenis ir įjungus sprendimo režimą, kaip tai parodyta sprendžiant uždavinį 1.1, gauname sprendinį, pateiktą 6 lentelėje (kiekvienas norintis gali gauti šį sprendinį savarankiškai).

6 lentelė. **Uždavinio 1.4 sprendimo kompiuteriu rezultatai**

	A	B	C	D	E	F
1			x_1	x_2		
2			**10**	**61**		**32,4**
3	**1500**	**1499,5**	**31**	**19,5**		
4	**200**	**203**	**2**	**3**		

Matome, kad reikia pirkti ir sodinti 10 pirmos rūšies ir 61 antros rūšies medelių. Bus apsodinti 203 kv. m. šlaito ir panaudota 1499,5 Lt, t. y. įvykdyti visi apribojimai. Prigis 32,4 medelio.

Uždavinys 1.9. Reikalingas kasininkų skaičius

Reikia nustatyti minimalų kasininkų skaičių, jei:

- parduotuvė dirba kasdien;
- kasininkai per savaitę turi dirbti 5 dienas iš eilės;
- atsižvelgus į pirkėjų srautus savaitės dienomis, žinomi kiekvienos savaitės dienos reikalaujami kasininkų skaičiai, pateikti 7 lentelėje.

7 lentelė. **Reikalingas kasininkų skaičius**

Savaitės dienos	1	2	3	4	5	6	7
Reikia kasininkų	5	6	7	8	9	10	11

Uždavinio formulavimas.

Pažymime x_i – skaičius kasininkų, pradedančių dirbti konkrečią savaitės dieną, pažymėtą indeksu i ($i = 1$ – pirmadienis).

Tikslo funkcija

$$L = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \to \min.$$

Ribinės sąlygos (nustato dirbančių kasininkų poreikį): pirma eilutė – pirmadienį, antra – antradienį ir t. t.

$$x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 5,$$
$$x_1 + x_{42} + x_5 + x_6 + x_7 \geq 6,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 7,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 8,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 9,$$
$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 10,$$
$$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 11.$$

Sprendinys taikant programą Solver. Kintamųjų reikšmės:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1			x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
2			0	0	5	1	4	0	2
3	5	7	1	0	0	1	1	1	1
4	6	6	1	1	0	0	1	1	1
5	7	7	1	1	1	0	0	1	1
6	8	8	1	1	1	1	0	0	1
7	9	10	1	1	1	1	1	0	0
8	10	10	0	1	1	1	1	1	0

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = 5, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 4, \quad x_6 = 0, \quad x_7 = 2.$$

Vadinasi, optimalus kasininkų kiekis yra 12 (5 + 1 + 4 + 2).

Paaiškinimai:

1. Trečiadienį turi dirbti 5 kasininkai (Nr. 1–5).
2. Ketvirtadienį pradeda dirbti dar vienas kasininkas (Nr. 6).
3. Penktadienį pradeda dirbti dar 4 kasininkai (Nr. 7–10).
4. Šeštadienį papildomai kasininkų nekviečiama.
5. Sekmadienį pradeda dirbti dar 2 kasininkai (Nr. 11 ir 12).
6. Dirbančių kasininkų skaičius viršija minimalų trečiadienį – dviem, sekmadienį ir antradienį – po vieną.

Lentelių metodas. Transporto uždavinys

Norint kompiuteriu išspręsti transporto uždavinį taikant lentelių metodą, reikia numatyti, kur bus užrašyti visi reikalingi duomenys.

Veiksmų seką patogu nagrinėti pasitelkus konkretų pavyzdį.

Uždavinys 1.10. Tarkime, yra 4 sandėliai (S_1, S_2, S_3, S_4) ir 5 vartotojai (V_1, V_2, V_3, V_4, V_5).

Kiekviename iš sandėlių yra krovinių atsargos: $a_1 = 45$, $a_2 = 20$, $a_3 = 55$, $a_4 = 50$. Bendras jų kiekis visuose sandėliuose yra 170 vienetų.

Kiekvienam vartotojui reikia: $b_1 = 20$, $b_2 = 20$, $b_3 = 30$, $b_4 = 40$, $b_5 = 60$ krovinių vienetų. Tai vadinamosios vartotojų paraiškos.

Reikia patenkinti visas paraiškas ir pasiekti, kad bendra krovinių pristatymo kaina visiems vartotojams būtų minimali.

Sprendimas. Būtina nustatyti, kiek kainuoja vieno krovinio vieneto pristatymas iš kiekvieno sandėlio kiekvienam vartotojui. Įvertinamas nuotolis tarp sandėlių ir vartotojų, transporto tipas, laikas ir kiti veiksniai. Tarkime, atlikus tokius vertinimus, apskaičiuotos išlaidos, būtinos norint pristatyti vieną krovinių vienetą iš konkretaus sandėlio pasirinktam vartotojui – c_{ij}. Čia indeksas i parodo sandėlio numerį, o indeksas j – vartotoją. Vieno vieneto krovinių pristatymo kainos pateiktos 8 lentelėje.

8 lentelė. **Vieno vieneto krovinių pristatymo kaina (koeficientai c_{ij})**

Sandėliai	Koeficientai c_{ij}				
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
S_1	$c_{11} = 10$	$c_{12} = 6$	$c_{13} = 7$	$c_{14} = 8$	$c_{15} = 5$
S_2	$c_{21} = 8$	$c_{22} = 7$	$c_{23} = 9$	$c_{24} = 4$	$c_{25} = 4$
S_3	$c_{31} = 10$	$c_{32} = 9$	$c_{33} = 7$	$c_{34} = 6$	$c_{35} = 5$
S_4	$c_{41} = 4$	$c_{42} = 5$	$c_{43} = 6$	$c_{44} = 10$	$c_{45} = 8$

Pažymime x_{ij} krovinių kiekį, kuris vežamas iš sandėlio S_i vartotojui , V_j. Tokių kintamųjų šiuo konkrečiu atveju yra 20 (4 × 5).

Reikia nustatyti, koks krovinių pristatymo planas yra pigiausias, t. y. optimalias tų kintamųjų reikšmes.

Tai reiškia, kad reikia minimizuoti tokią funkciją:

$$L = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{21}x_{21} + \ldots = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij} \ .$$

Kintamieji x_{ij} turi atitikti dvi grupes reikalavimų.

Bendras krovinių kiekis, vežamas iš kiekvieno sandėlio, neturi viršyti ten esamų atsargų, t. y. turi būti teisingos nelygybės:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \le 45,$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \le 20,$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} \le 55,$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} \le 50.$$

Bendras krovinių kiekis, atgabentas iš visų sandėlių kiekvienam vartotojui, turi atitikti paraiškoje nurodytą kiekį:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 20,$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 20,$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 30,$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 40,$$
$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 60.$$

Matome, kad yra 9 ribinės sąlygos.

Taikome „šiaurės vakarų kampo“ būdą, kuris padeda sudaryti atraminį (pradinį, vieną iš galimų) planą. Tai parodyta 9 lentelėje.

9 lentelė. **Atraminis krovinių vežimo planas (kintamųjų x_{ij} reikšmės)**

Sandėliai	Kintamieji x_{ij}					Atsargos a_i
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	
S_1	$x_{11} = 20$	$x_{12} = 20$	$x_{13} = 5$	$x_{14} = 0$	$x_{15} = 0$	45
S_2	$x_{21} = 0$	$x_{22} = 0$	$x_{23} = 20$	$x_{24} = 0$	$x_{25} = 0$	20
S_3	$x_{31} = 0$	$x_{32} = 0$	$x_{33} = 5$	$x_{34} = 40$	$x_{35} = 10$	55
S_4	$x_{41} = 0$	$x_{42} = 0$	$x_{43} = 0$	$x_{44} = 0$	$x_{45} = 50$	50
Paraiškos b_j	20	20	30	40	60	170

Parengiamasis etapas baigtas.

Įjungiame Excel programą: Start; Microsoft Excel.

Sprendžiant šį uždavinį, kintamuosius x_{ij} galima išdėstyti taip, kad jie sutaptų su jų išdėstymu 8 ir 9 lentelėse. Tada išvengiama papildomo darbo priskiriant juos atitinkamiems langeliams ir interpretuojant gautą vežimo planą.

Siekiant šio tikslo reikia sudaryti tokio turinio 10 lentelę.

1. Užpildome 10 lentelę, į langelius I2:O7 surašydami sprendinį, gautą taikant „šiaurės vakarų kampo“ metodą.

2. Langeliuose C3:G6 užrašomos koeficientų c_{ij} reikšmės (žr. 8 lentelę).

3. Langeliuose A3:A11 užrašomos: 1) atsargų ir 2) paraiškų reikšmės:

1) A3 – 45, A4 – 20, A5 – 55, A6 – 50;

2) A7 – 20, A8 – 20, A9 – 30, A10 – 40, A11 – 60.
4. Langeliuose B3:B11 užrašome ribinių sąlygų formules.
4.1. Susietas su atsargomis (langeliai B3:B6):
Langelyje B3: = J3 + K3 + L3 + M3 + N3. (Pasirodo skaičius 45)
Langelyje B4: = J4 + K4 + L4 + M4 + N4. (Pasirodo skaičius 20)
Langelyje B5: = J5 + K5 + L5 + M5 + N5. (Pasirodo skaičius 55)
Langelyje B6: = J6 + K6 + L6 + M6 + N6. (Pasirodo skaičius 50)

10 lentelė. **Kintamųjų x_{ij} išdėstymas, susiejant juos su sandėliais ir vartotojais**

	I	J	K	L	M	N	O
1							
2		V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	Ats. a_i
3	S_1	$x_{11} = 20$	$x_{12} = 20$	$x_{13} = 5$	$x_{14} = 0$	$x_{15} = 0$	45
4	S_2	$x_{21} = 0$	$x_{22} = 0$	$x_{23} = 20$	$x_{24} = 0$	$x_{25} = 0$	20
5	S_3	$x_{31} = 0$	$x_{32} = 0$	$x_{33} = 5$	$x_{34} = 40$	$x_{35} = 10$	55
6	S_4	$x_{41} = 0$	$x_{42} = 0$	$x_{43} = 0$	$x_{44} = 0$	$x_{45} = 50$	50
7	Par. b_j	20	20	30	40	60	170

11 lentelė. **Koeficientų c_{ij} reikšmių išdėstymas langeliuose**

	C	D	E	F	G
3	*10*	*6*	*7*	*8*	*5*
4	*8*	*7*	*9*	*4*	*4*
5	*10*	*9*	*7*	*6*	*5*
6	*4*	*5*	*6*	*10*	*8*

4.2. Susietas su paraiškomis: (langeliai B7:B11):
Langelyje B7: = J3 + J4 + J5 + J6. (Pasirodo skaičius 20)
Langelyje B8: = K3 + K4 + K5 + K6. (Pasirodo skaičius 20)
Langelyje B9: = L3 + L4 + L5 + L6. (Pasirodo skaičius 30)
Langelyje B10: = M3 + M4 + M5 + M6. (Pasirodo skaičius 40)
Langelyje B11: = N3 + N4 + N5 + N6. (Pasirodo skaičius 60)
5. Langelyje A13 užrašoma tikslo funkcijos formulė:
=C3*J3+D3*K3+E3*L3+F3*M3+G3*N3+C4*J4+D4*K4+E4*L4+F4*M4+G4*N4+C5*J5+D5*K5+E5*L5+F5*M5+G5*N5+C6*J6+D6*K6+E6*L6+F6*M6+G6*N6.

6. Įjungiamas sprendimo režimas: Tools; Solver.

Dialogo langelyje atliekami tokie veiksmai:

6.1. Set Target Cell: A13 (žymeklį uždėti ant langelio A13).

6.2. Pažymėti Min, nes norima minimizuoti tikslo funkciją.

6.3. By Changing Cells: J3:O6 (nuoroda į visus kintamuosius).

6.4. Add (nuorodos į ribines sąlygas):

- Cell Reference: B3:B11 (nuorodos į ribinių sąlygų formules);
- = (visose ribinėse sąlygose yra lygybės ženklai.);
- Constraints: A3:A11 (nuorodos į langelius, kuriuose užrašyti ribinių sąlygų laisvieji nariai);
- OK.

6.5. Add (nuorodos, kurios įgyvendina reikalavimą, kad visi kintamieji būtų neneigiami):

- Cell Reference: J3:O6;
- >=;
- 0;
- OK.

6.6. Add (nuorodos, kad visi kintamieji turi būti sveikieji skaičiai):

- Cell Reference: J3:O6;
- Integer;
- OK.

7. Solve; Keep Solver Solution; OK.

8. Užrašome sprendinį:

$$L = 880,$$
$$x_{13} = 20, \quad x_{15} = 25, \quad x_{24} = 20, \quad x_{34} = 20,$$
$$x_{35} = 35, x_{41} = 20, x_{42} = 20, \quad x_{43} = 10.$$

Uždavinys išspręstas. Sprendinį matome pradinėje lentelėje.

Gautas sprendinys nesutampa su analogišku sprendiniu, gautu sprendžiant 1.7 uždavinį. Tačiau čia nėra jokio prieštaravimo. Tiesiog optimalių sprendinių gali būti ne vienas, ir jie randami sprendžiant uždavinį pakartotinai. Ši aplinkybė skatina kartoti uždavinio sprendimo procedūrą ir iš gautų optimalių sprendinių pasirinkti labiausiai priimtiną atsižvelgiant į kokias nors aplinkybes, kurios nebuvo vertinamos formuluojant uždavinį.

Išvada. Pradinio krovinių vežimo plano kaina buvo 1260 Lt.

Ši pradinė kaina gali būti ir didesnė priklausomai nuo to, kaip yra išsidėstę sandėliai vartotojų atžvilgiu. Norint sužinoti, kokia galėtų būti maksimali krovinių vežimo kaina, reikia rasti sprendinį, kai šio plano kaina maksimizuojama, t. y. po komandų Tools; Solver pažymėti Max.

Sprendinys būtų toks:

$$L = 1400,$$
$$x_{14} = 40,\quad x_{15} = 5,\quad x_{23} = 20,\quad x_{31} = 20,$$
$$x_{32} = 20,\quad x_{33} = 10,\quad x_{35} = 5.\quad x_{45} = 50.$$

Vadinasi, geriausio krovinių vežimo plano kaina gali būti mažesnė beveik 60 procentų palyginus su blogiausiu planu.

Savitikros užduotys

1. Teoriniai klausimai:

1.1. Kuo skiriasi tiesinio ir diskrečiojo programavimo uždaviniai?

1.2. Apibūdinkite šakų ir rėžių metodo esmę.

1.3. Kai tarpinis sprendimas nėra sveikaskaitis, kokia turi būti tolimesnė sprendimo paieškos strategija?

1.4. Koks yra bendras sveikaskaičio sprendimo paieškos algoritmas?

2. Praktinės užduotys:

2.1. Išspręskite uždavinį:

Priešlėktuvinės sistemos kūrimas padalintas į etapus. Pirmame etape skiriami 5 mln. Lt ir reikia pridengti nuo smūgių iš oro 500 km^2 LR teritorijos. Visos kitos sąlygos tos pačios kaip ir uždavinyje 2.1. Būtina nustatyti, kiek ir kokių zenitinių raketų komplektų tipų tikslinga įsigyti.

2.2. Uždavinį, suformuluotą 2.1 punkte, išspręskite kompiuteriu.

2.3. Sudarykite geriausią ir blogiausią prekių pristatymo planą remdamiesi atraminiu sprendiniu, pateiktu 12 lentelėje.

12 lentelė. **Atraminis sprendinys**

	S1	S2	S3	S4	S5	Atsargos
A1	**15** **20**	**20** **20**	**13** **5**	**10**	**18**	**45**
A2	**23**	**14**	**16** **20**	**17**	**12**	**20**
A3	**19**	**14**	**10** **5**	**11** **40**	**13** **10**	**55**
A4	**9**	**13**	**8**	**10**	**16** **50**	**50**
Pa-raiš-kos	**20**	**20**	**30**	**40**	**60**	**170**

Atsakymai:

1. Optimalus sprendinys (prekių pristatymo planas):

$$L = 1880 \text{ Lt.}$$
$$x_{13} = 5,\ x_{14} = 40,$$
$$x_{25} = 20,$$
$$x_{32} = 15,\ x_{35} = 40,$$
$$x_{41} = 20,\ x_{42} = 5,\ x_{43} = 25.$$

2. Blogiausias planas

$$L = 2665 \text{ Lt.}$$
$$x_{12} = 20,\ x_{13} = 15,\ x_{15} = 10,$$
$$x_{23} = 15,\ x_{24} = 5,$$
$$x_{31} = 20,\ x_{34} = 35,$$
$$x_{45} = 50.$$

2.4. Sudarykite geriausią ir blogiausią prekių pristatymo planą remdamiesi atraminiu sprendiniu, pateiktu 13 lentelėje.

13 lentelė. **Atraminis sprendinys**

	S1	S2	S3	S4	S5	Atsargos
A1	**5** **18**	**6** **18**	**7** **12**	**8**	**8**	**48**
A2	**7**	**8**	**4** **30**	**5**	**3**	**30**
A3	**9**	**10**	**11**	**8** **12**	**6** **15**	**27**
A4	**6**	**4** **9**	**10**	**9**	**7** **11**	**20**
Paraiškos	**18**	**27**	**42**	**12**	**26**	**125**

Atsakymai:

1. Optimalus sprendinys (prekių pristatymo planas):

$$L = 668 \text{ Lt.}$$

$$x_{11} = 18,\ x_{12} = 7,\ x_{13} = 19,\ x_{14} = 4,$$
$$x_{23} = 23,\ x_{24} = 3,\ x_{24} = 4,$$
$$x_{34} = 5,\ x_{35} = 22,$$
$$x_{42} = 20.$$

2. Blogiausias planas

$$L = 1078 \text{ Lt.}$$
$$x_{11} = 8,\ x_{12} = 2,\ x_{14} = 12,\ x_{15} = 26,$$
$$x_{21} = 5,\ x_{22} = 25,$$
$$x_{31} = 5,\ x_{33} = 22,$$
$$x_{43} = 20.$$

2.5. Reikia maksimizuoti tikslo funkciją

$$L = 4x_1 + 2x_2,$$

esant tokioms ribinėms sąlygoms:

$$x_3 = 118{,}75 - 12{,}5x_1 - 9{,}5x_2,$$
$$x_4 = 1{,}2 + 2{,}4x_1 - 0{,}5x_2,$$
$$x_5 = -25{,}2 + 5{,}6x_1 + 4{,}5x,$$
$$x_6 = x_1 - 2x_2.$$
$x_{1,}\ x_2$ – sveikieji skaičiai.

Atsakymas:
L = 20,
$x_1 = 0,\ x_2 = 10.$

2.6. Išspręskite 2.5. uždavinį, jei tikslo funkciją reikia minimizuoti.

Atsakymas

L = 16, $x_1 = 4,\ x_2 = 0.$

3 TEMA

TINKLINIS PLANAVIMAS

3.1. Teoriniai planavimo aspektai

Planavimas yra sudėtinė valdymo ciklo dalis.

Valdymo ciklas apima:

1. Sprendimo parengimą ir jo priėmimą.
2. Planavimą.
3. Organizavimą.
4. Kontrolę.
5. Derinimą, koordinavimą, vadovavimą.
6. Motyvavimą.

Šioje temoje nagrinėjama viena valdymo ciklo dalis – planavimas.

Planavimo tikslas – surasti geriausias priemones ir būdus pasirinktam sprendimui įgyvendinti.

Planas – tai valdymo strategija.

Planavimo etapai:

2.1. Problemos esmės, tikslo formulavimas ir kriterijų pasirinkimas.
2.2. Priežasčių diagnostika.
2.3. Problemos struktūrizavimas.
2.4. Galimybių analizė ir alternatyvų paieška.
2.5. Iškylančių problemų geriausių sprendimų atranka.
2.6. Dalinių sprendimų suderinimas ir priėmimas.

Plane numatoma:

- Ką, kiek, kur reikia atlikti.
- Kas turi atlikti.
- Kada reikia atlikti.
- Kokių išteklių kiek ir kada reikia.
- Koks turi būti rezultatas.

Sudarius planą, reikia organizuoti jo vykdymą. Čia atliktini tokie darbai:

3.1. Valdymo struktūrų konkretiems darbams atlikti sukūrimas.

3.2. Technologinių procesų parinkimas.
3.3. Procesų suskirstymas į operacijas.
3.4. Išteklių paskirstymas.
3.5. Darbo vietų nustatymas ir jų parengimas.
3.6. Užduočių vykdytojams konkretizavimas.
3.7. Atsakomybės ir atskaitomybės paskirstymas.

Vadovavimo esmę sudaro darbų, einamųjų sprendimų priėmimas ir išteklių paskirstymo koregavimas.

3.2. Valdymo turinys

Valdymo sistema atlieka valdymo funkcijas – reguliuoja visus organizacijos procesus, kurie išskaidomi į dar smulkesnius procesus, vykstančius visose jos posistemėse. Taigi valdymas yra sudėtingas procesas. Trumpai tai galima aprašyti taip. Valdymo sistemos vadovai, specialistai ir techniniai darbuotojai įgyvendina organizacijos tikslus: renka duomenis apie organizacijos procesus, nagrinėja surinktą informaciją, rengia ir priima sprendimus, rūpinasi jų įgyvendinimu. Vadinasi, valdymo pagrindą sudaro sprendimų parengimas, priėmimas ir jų įgyvendinimas.

Visi valdymo sistemos priimami sprendimai skirstomi į globalius ir lokalius, kompleksinius ir programinius, strateginius, taktinius ir operatyvinius, gamybinius komercinius, finansavimo, socialinius ir t. t.

Darbas, priimant bet kokius sprendimus, yra toks:

- formuluojamas sprendimo tikslas;
- renkama, apdorojama ir nagrinėjama vidinė ir išorinė informacija;
- prognozuojami įvairių veiksnių pasikeitimai;
- kuriamas situacijos modelis, formuluojamos išvados;
- atrenkami sprendimų variantai;
- įvertinus visus sprendimų variantus, pasirenkamas optimalus, racionalus arba bent geriausias iš atrinktų.

Priimtas sprendimas įgyvendinamas tokia tvarka:

- sudaromas to sprendimo įgyvendinimo planas;
- organizuojamas plano vykdymas;
- renkami duomenys, kaip šis planas vykdomas;
- koreguojamas planas, darbų seka, vykdytojų funkcijos, daromi visi būtini organizaciniai pakeitimai;
- ieškoma, kaip gerinti darbų, veiklos ir produkcijos kokybę.

Šie sprendimo priėmimo bei įgyvendinimo darbai ir sudaro valdymo ciklą, o šio ciklo etapai sutampa su bendrosiomis valdymo funkcijomis.

Priimant ir įgyvendinant sprendimus, pagrindinį vaidmenį vaidina renkama, apdorojama ir naudojama informacija. Valdymo informacija skirstoma į išorinę ir vidinę, pirminę ir išvestinę (antrinę), nuolatinę ir diskretišką, naudingą ir nenaudingą arba net žalingą, atvirą ir slaptą. Sprendimų kokybė priklauso nuo informacijos pakankamumo, tikslumo ir terminų.

Valdymo funkcijas tikslinga apibūdinti plačiau, nes jų turinys lieka nesusijęs su organizacijos veiklos kryptimi.

Sprendimo rengimo ir priėmimo funkcijos vaidmuo valdymo cikle yra didžiausias. Sprendimas – tai numatymas ir pasirinkimas, ką ir kokiais būdais reikia daryti, kad būtų įgyvendintas užsibrėžtas tikslas ir išspręsta iškilusi problema.

Yra daug būdų parengti sprendimą. Dažniausiai specialistai surenka visą įmanomą informaciją, ją apdoroja ir nagrinėja, sudaro matematinius, situacinius arba loginius modelius, išskiria ir vertina daug galimų sprendimo variantų, nustato teigiamas ir neigiamas kiekvieno varianto savybes ir rekomenduoja geriausią iš jų.

Kitas svarbus valdymo ciklo etapas yra *planavimas*. Jo metu numatoma, kokius veiksmus ir kada reikia atlikti, kas atlieka ir kokie ištekliai būtini šiam planui įgyvendinti.

Planai pagal planavimo laiką skirstomi į strateginius, taktinius ir operatyvinius; pagal turinį – į gamybos, aprūpinimo, finansų ir pan.; pagal sprendimų tikslus – į kompleksinius, programinius; pagal apimtį – į globalius, lokalius ir kt. Kiekvienas planas apibūdinamas visais keturiais požymiais, pvz., sudaromas strateginis programinis globalus Akademijos mokslo darbo planas.

Planus rengia specialistai analitikai, gerai suprantantys planuojamos organizacijos veiklos dalį. Sudaryti planai būna lentelės, Ganto grafiko arba tinklinio grafiko pavidalo.

Paprasčiausia plano forma yra lentelė, kurios pirmame stulpelyje chronologine tvarka surašomi visi darbai, o kituose stulpeliuose – vykdymo terminai, vykdytojai, ištekliai.

Pagrindinis tokio plano pranašumas – jis sudaromas labai greitai. Tačiau toks planas turi ir didelių trūkumų: neatskleistos detalės, nenumatytos sąveikos problemos, tokio plano negalima optimizuoti.

Kita plano forma – Ganto grafikas aprėpia operacijas ir numato konkrečius laiko intervalus šiems darbams atlikti.

Tokio grafiko forma pateikta 1 lentelėje.

Ganto grafiko tipo planas yra pranašesnis už paprastą darbų sąrašą: yra daug vaizdingesnis ir atskleidžia kai kurias darbų sąveikos problemas (matyti, kokie darbai ir kada atliekami kartu). Be to, jį sudaryti taip pat lengva kaip ir paprastą darbų sąrašą. Svarbiausi jo trūkumai yra šie: ne visos sąveikos problemos aiškios, planą sunku optimizuoti, nepateikiama informacija, kaip kontroliuoti jo vykdymą operacijoms nesibaigus.

1 lentelė. **Ganto grafikas**

Operacijos (darbai)	Laikas, dienos																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
a_1	X	X	X															
a_2			X	X	X	X												
a_3							X	X	X	X	X							
a_4										X	X	X	X	X				
a_5													X	X	X	X	X	X

3.3. Tinklinio planavimo esmė

Pats tobuliausias iš visų galimų planų yra tinklinis grafikas. Šį planavimo būdą pirmieji pritaikė amerikiečiai XX amžiaus šeštojo dešimtmečio pabaigoje ir pavadino PERT technologija (*Program or Project Evolution and Review Technique*).

Tinklinis planavimas ypač naudingas, kai tenka planuoti sudėtingą darbų kompleksą. Kaip teigia A. R. Theony, tinklinis planas leido sutaupyti ne vienerius metus įgyvendinant balistinių raketų „Polaris“ kūrimo programą. Todėl tinklinis planavimas buvo pripažintas tinkamiausiu ir tapo plačiai taikomu visame pasaulyje planavimo metodu, ypač privačiame sektoriuje.

Tinklinį planavimą kartais dar vadina kritinio kelio metodu (*Critical Path Method* – CRM). Jis šiek tiek skiriasi nuo PERT metodologijos, kurioje pagrindinis dėmesys skiriamas laiko taupymui ir jo valdymui, o kritinio kelio metodas daugiau taikomas, kai svarbiausia yra kontroliuoti komplekso darbų kainą. Tačiau abu reikalavimai gali būti suderinti viename tinkliniame grafike, kuriame nagrinėjami kokio nors projekto trukmės ir kainos klausimai.

Vadinasi, tinklinis planavimas gali būti galingas instrumentas vadybininko rankose, leidžiantis nustatyti ir koordinuoti įvairius darbus, vykdant sudėtingą užduotį. Tačiau šis planavimo metodas praverčia ir vykdant gana paprastą užduotį, ypač jei joje dalyvauja keli vykdytojai ar jų grupės, ir jų veikla yra susieta. Tokių užduočių pavyzdžiai: pastatyti namą, suremontuoti kokį nors objektą, suplanuoti kokios nors programos įgyvendinimą ir pan.

Taikant tinklinio planavimo metodus galima:

- geriau panaudoti turimus materialinius išteklius ir žmones;
- iš anksto nustatyti sąveikos problemas;
- numatyti silpnas projekto vietas ir vadovo vietą;
- padidinti valdymo efektyvumą.

Norint pasinaudoti šio metodo pranašumais, reikia mokėti tokius planus sudaryti, analizuoti, optimizuoti ir taikyti.

Tarkim, kad reikia atlikti kompleksą darbų, kuriuos sieja bendri tikslai. Šį kompleksą darbų sudaro mažesni darbai, kurie arba negali būti dar padalyti į mažesnius darbus, arba tai netikslinga dėl kokių nors priežasčių, pvz., iš anksto optimizuotos tų darbų technologijos. Tokie darbai vadinami paprastaisiais darbais, arba grandimis. Paprastieji darbai priklauso vienas nuo kito. Kai kurie darbai gali būti atlikti tik po to, kai bus padaryta daug kitų paprastųjų darbų.

Planuojant darbų kompleksą tenka spręsti šiuos uždavinius:

- kaip paskirstyti materialinius išteklius ir darbuotojus paprastiesiems darbams atlikti;
- kada pradėti ir baigti kiekvieną darbą;
- kokių gali iškilti sunkumų, norint laiku baigti kiekvieną paprastąjį darbą, ir kaip tuos sunkumus pašalinti.

Tinklinis planavimas leidžia spręsti dviejų rūšių uždavinius:

1) kas bus, jei darbai bus vykdomi pagal pasiūlytą schemą;
2) kaip organizuoti darbų vykdymą, kad šis procesas būtų optimalus (pigiausias, atliktas greičiausiai, reikės mažiau darbuotojų ir t. t.).

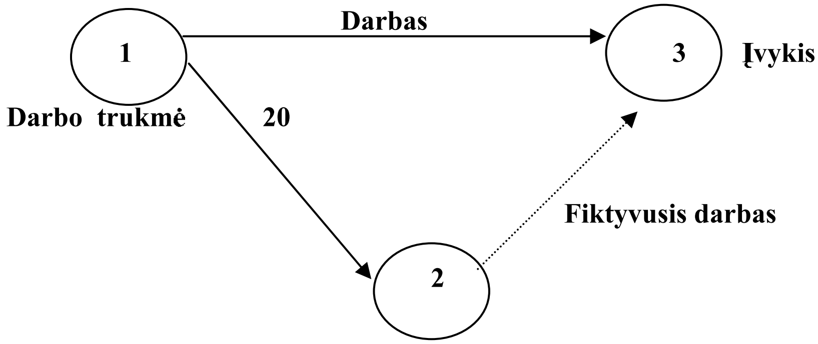
3.4. Pagrindinės sampratos

Pagrindinė tinklinio planavimo samprata **– darbas**. Tai procesas, reikalaujantis laiko, darbuotojų, materialinių vertybių ir t. t.

Fiktyvusis darbas – tai loginė priklausomybė, kai negalima pradėti vieno darbo, kol nebus baigtas kitas. Šiam darbui nereikia nei laiko, nei išteklių.

Įvykis – tam tikros paprastųjų darbų grupės pabaiga**.**

Tinkliniuose grafikuose įvykiai vaizduojami skrituliais, darbai – vientisomis rodyklėmis, fiktyvieji darbai – punktyrinėmis rodyklėmis (žr. 1 pav.).



1 pav. **Tinklinio grafiko fragmentas**

Įvykis baigtas, jei pabaigtas pats ilgiausias darbas, įeinantis į šį įvykį.

Tinklu arba **tinkliniu grafiku** vadinama grafiškai pavaizduota darbų seka. Kiekviename tinkle yra daug būdų, kaip iš pradinio taško patekti į galinį. Bet kuris būdas yra įgyvendinamas einant kokia nors tinklo šaka, kurią sudaro esantys toje šakoje darbai. Šakos arba kelio ilgis susideda iš tų darbų trukmių, t. y. yra lygus darbų trukmių sumai. Sudarius tinklą, ieškomas toks kelias, kurio trukmė yra maksimali. Vadinasi, kritinis kelias – tai ta darbų seka grafike, kurios trukmė yra didžiausia.

Keliai, kurių trukmė mažai skiriasi nuo kritinio kelio trukmės, vadinami **pokritiniais**.

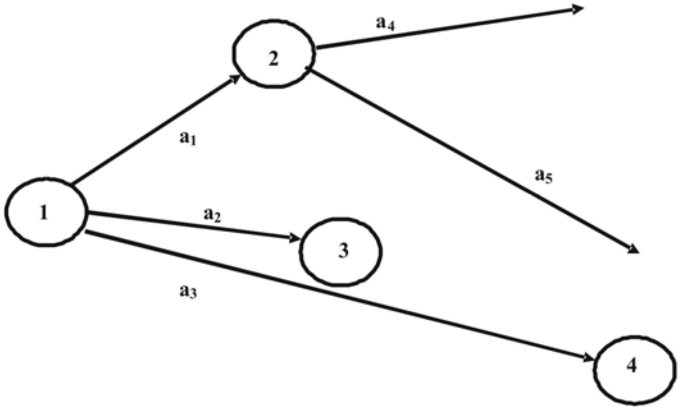
Bet kuris nekritinis kelias turi laiko rezervą, kuris yra lygus kritinio ir nagrinėjamo kelio trukmių skirtumui.

Išskiriami tokie tinklinio planavimo etapai: sudarymas, analizė, optimizacija ir taikymas.

Išnagrinėsime kiekvieną iš jų.

3.5. Tinklinio grafiko sudarymas

Šis darbas pradedamas paprastųjų darbų sąrašo sudarymu. Kiekvienas toks darbas pažymimas kokia nors raide, pvz., a_i. Būtina nustatyti ryšį tarp visų paprastųjų darbų, t. y. kokie paprastieji darbai turi būti atlikti, kad būtų galima pradėti konkretų darbą. Šią informaciją patogu pateikti lentelėje, kurioje taip pat reikia pažymėti kiekvieno paprastojo darbo trukmę (žr. 2 lentelę).



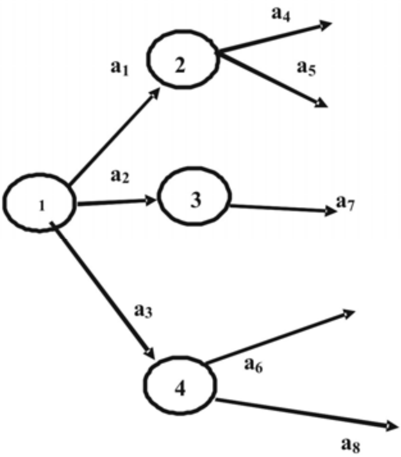
2 pav. **Pirmas tinklinio grafiko fragmentas**

Tinklo sudarymą pradedame nuo darbų, kurie nepriklauso nuo kitų darbų. Tokie yra darbai a_1, a_2 ir a_3. Pažymime pradinį įvykį (1), iš jo išeina trys strėlės. Kadangi a_4 ir a_5 priklauso nuo a_1, tai pažymėję įvykį (2) kaip pirmo darbo pabaigą gauname rezultatą, parodytą 2 paveiksle.

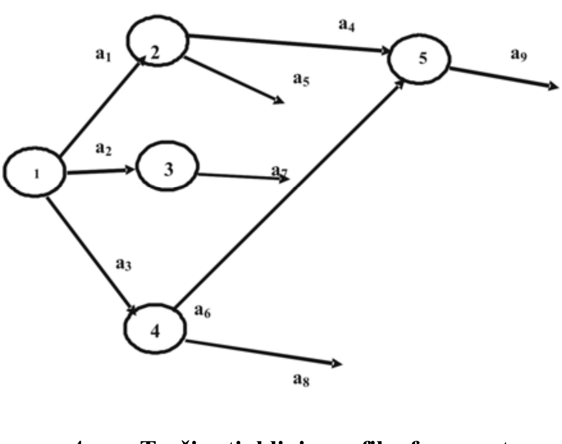
2 lentelė**. Darbų sąrašas**

Paprastieji darbai	**Trukmė, dienos**	**Prieš tai atliekami darbai**	**Darbų indeksai (kompiuteriui)**
a_1	7	-	$a_1 = a_{1,2}$
a_2	8	-	$a_2 = a_{1,3}$
a_3	10	-	$a_3 = a_{1,4}$
a_4	12	a_1	$a_4 = a_{2,5}$
a_5	14	a_1	$a_5= a_{2,8}$
a_6	16	a_3	$a_6 = a_{4,5}$
a_7	20	a_2	$a_7 = a_{3,6}$
a_8	15	a_3	$a_8 = a_{4,6}$
a_9	13	a_4 , a_6	$a_{5,7}$
a_{10}	17	a_7 , a_8	$a_{10} = a_{6,7}$
a_{11}	25	a_7 , a_8	$a_{11} = a_{6,8}$
a_{12}	21	a_7 , a_8	$a_{12} = a_{6,9}$
a_{13}	16	a_9 , a_{10}	$a_{13} = a_{7,10}$
a_{14}	14	a_5 , a_{11}	$a_{14} = a_{8,10}$
a_{15}	21	a_{12}	$a_{15} = a_{9,10}$

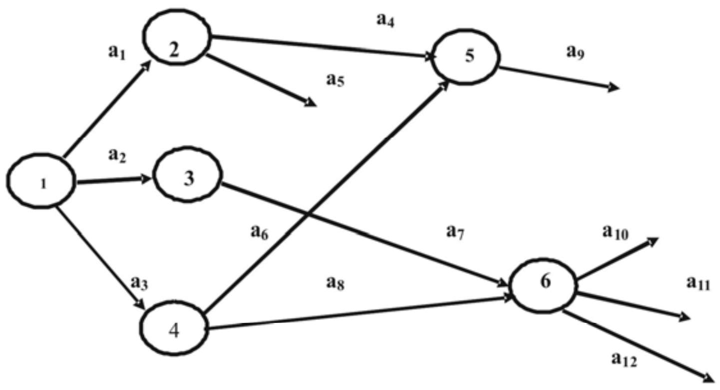
Matydami, kad a_6 ir a_8 priklauso nuo a_3, turim suvesti juos į vieną įvykį – pažymėkime jį (4) (3 pav.). Darbas a_7 priklauso tik nuo darbo a_2 ir todėl, kaip pastarojo darbo pabaigą pažymėję įvykį (3), išvedame iš jo darbo a_7 strėlę. Kadangi a_9 priklauso nuo a_4 ir a_6, tai tuos darbus reikia suvesti į vieną įvykį (5) ir iš to įvykio nubrėžti a_9 darbo strėlę (4 pav.). Darbai a_{10}, a_{11} ir a_{12} paremti dviem darbais – a_7 ir a_8. Pažymėkime tų darbų pabaigą įvykiu (6) (žr. 5 pav.).



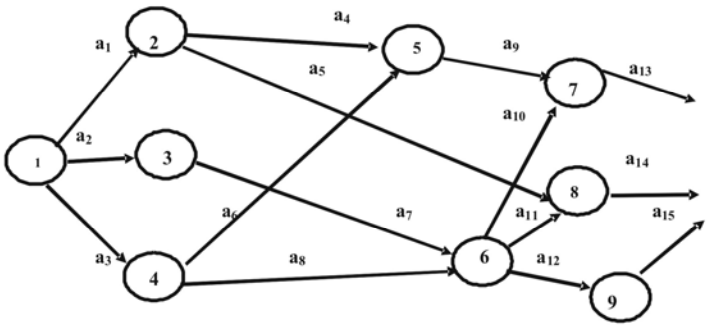
3 pav. **Antras tinklinio grafiko fragmentas**



4 pav. **Trečias tinklinio grafiko fragmentas**



5 pav. **Ketvirtas tinklinio grafiko fragmentas**

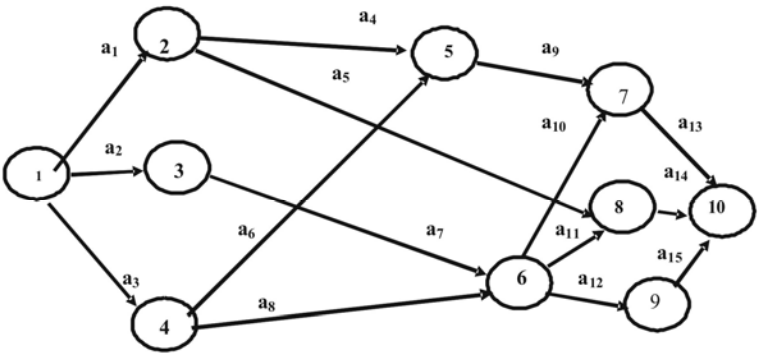


6 pav. **Penktas tinklinio grafiko fragmentas**

Darbas a_{13} priklauso nuo darbų a_9 ir a_{10} . Jų pabaigą pažymime septintu įvykiu, todėl iš šio įvykio brėžiama a_{13} darbo strėlė. Darbas a_{14} priklauso nuo a_5 ir a_{11}, t. y. nuo aštunto įvykio. Darbas a_{15} susijęs su darbu

a_{12}, kurio pabaiga yra įvykis (9) (žr. 6 pav.). Sujungę laisvus galus į paskutinį įvykį, gauname visą tinklą (baigtą tinklą), parodytą 7 paveiksle.

Tuo baigiamas tinklo sudarymas.



7 pav. **Tinklinis grafikas**

3.6. Tinklinio plano analizė

Analizės metu apskaičiuojami tokie parametrai:

1. Ankstyvoji įvykių pabaiga.
2. Vėlyvoji įvykių pabaiga.
3. Įvykių laiko rezervai.
4. Darbų laiko rezervai.
5. Kritinis kelias.
6. Kritiniai darbai.

Analizės pagrindiniai tikslai: rasti kritinį kelią ir visų darbų bei įvykių laiko rezervus. Darbai, kurie yra kritiniame kelyje, vadinami kritiniais darbais. Tai svarbiausi darbai, nes nuo jų priklauso viso darbų komplekso pabaiga. Jie turi būti pradėti tiksliai tuo laiku, kai baigiasi darbai, nuo kurių jie priklauso. Kitaip kalbant, tie darbai negali būti uždelsti ar atliekami ilgiau negu planuota, o kiti darbai gali turėti laiko rezervą, t. y. būti uždelsti tam tikrą laiko tarpsnį. Todėl kritinius darbus turi kontroliuoti vadovas ir imtis priemonių, jeigu kyla grėsmė, kad jie nebus laiku pradėti ar tęsis ilgiau.

Todėl kritinis kelias dar vadinamas labiausiai pažeidžiama plano vieta.

Paprasčiausias kritinio kelio radimo būdas – išvardyti visus kelius, apskaičiuoti kiekvieno kelio trukmę ir pasirinkti ilgiausią iš jų.

Tinklinio plano analizei atlikti taikoma bendra PERT metodologija. Norint pasinaudoti šia technologija, reikia apibrėžti naujus terminus.

Ankstyvąja įvykio pabaiga vadinamas laiko momentas, kuris sutampa su ilgiausiai trunkančių šio įvykio darbų pabaiga, t. y. šis įvykis negali įvykti anksčiau, kol nepasibaigė visi darbai, įeinantys į jį. Ankstyvoji įvykio pabaiga žymima raide T_{Ai}, čia i – įvykio numeris.

Vėlyvąja įvykio pabaiga vadinamas laiko momentas, kuris nustato, kada vėliausiai jis turi įvykti, kad nepailgėtų kritinio kelio trukmė, t. y. galėtų būti laiku pradėti visi išeinantys iš to įvykio darbai. Vėlyvoji įvykių pabaiga žymima T_{Vi}, čia i – įvykio numeris.

Įvykio laiko rezervu vadinamas skirtumas tarp vėlyvosios ir ankstyvosios įvykių pabaigos. Jis žymimas $R_i = T_{vi} - T_{Ai}$.

Paprastojo darbo laiko rezervas – tai to darbo trukmę ribojantis laiko tarpas, kuris nepailgina kritinio kelio trukmės.

Darbai, esantys kritiniame kelyje, neturi jokių laiko rezervų. Bendri paprastųjų darbų rezervai priklauso vienas nuo kito, t. y. padidinus kokio nors paprastojo darbo laiką keičiasi kitų darbų rezervai, esantys nagrinėjamame kelyje.

Nagrinėjant tinklinį grafiką, reikia nustatyti kritinį kelią ir apskaičiuoti šio kelio trukmę. Be to, naudinga apskaičiuoti ankstyvąsias ir vėlyvąsias įvykių pabaigas, įvykių bei darbų rezervus.

Žinomi šie tinklinio grafiko apskaičiavimo būdai: analitinis, lentelių, grafinis.

Nagrinėjame grafinį būdą kaip labiausiai akivaizdų.

Įgytoms žinioms sutvirtinti apskaičiuokime ką tik sudarytą tinklinį grafiką (žr. 7 pav.), kuriame paprastųjų darbų trukmė išreikšta dienomis.

Norint išvengti daugybės užrašų tinkle, tikslinga kiekvieną skritulį, vaizduojantį įvykį, padalinti į keturias dalis (8 pav.). Viršutinėje dalyje rašome įvykio numerį, kairėje – ankstyvąsias įvykių pabaigas (T_{Ai}), dešinėje – vėlyvąsias įvykio pabaigas (T_{Ai}), apačioje – įvykių rezervus (R_i). Kiekvieno darbo rezervą pažymėsime skliausteliuose prie darbo pavadinimo ant strėlės.

Nustatydami ankstyvąsias įvykių pabaigas grafiką nagrinėjame iš kairės į dešinę. Pirmo įvykio $T_{A1} = 0$, antro $T_{A2} = 7$, trečio $T_{A3} = 8$, ketvirto $T_{A4} = 10$, penkto $T_{A5} = \max[(T_{A2}+t_4); (T_{A4}+t_6)] = 26$, šešto $T_{A6} = \max[(T_{A4}+t_8); (T_{A3}+t_7)] = 28$, septinto $T_{A7} = \max[(T_{A5}+t_9); (T_{A6}+t_{10})] = 45$, aštunto $T_{A8} = \max[(T_{A2}+t_5); (T_{A6}+t_{11})] = 53$, devinto $T_{A9} = 49$, dešimto $T_{A10} = 70$ dienų.

Vėlyvoji įvykių pabaiga nustatoma, nagrinėjant grafiką iš dešinės į kairę.

Dešimto įvykio $T_{A10} = T_{V10} = 70$ dienų.

Devinto įvykio $T_{V9} = T_{V10}\text{-}t_{15} = 49$ dienos.

Aštunto įvykio $T_{V8} = T_{V10}\text{-}t_{14} = 56$ dienos.

Septinto įvykio $T_{V7} = T_{V10}\text{-}t_{16} = 54$ dienos.

Šešto įvykio $T_{V6} = \min[(T_{V7}\text{-}t_{10}); (T_{V8}\text{-}t_{11}); (T_{V9}\text{-}t_{12})] = 28$ dienos.

Penkto įvykio $T_{V3} = 41$ diena.

Ketvirto įvykio $T_{V4} = \min[(T_{V5}\text{-}t_6); (T_{V6}\text{-}t_8)] = 13$ dienų.

Trečio įvykio $T_{V3} = 8$ dienos.

Antro įvykio $T_{V2} = \min[(T_{V5}\text{-}t_4); (T_{V8}\text{-}t_5)] = 29$ dienos.

Pirmo įvykio $T_{V1} = \min[(T_{V2}\text{-}t_1); (T_{V3}\text{-}t_2); (T_{V4}\text{-}t_3)] = 0$ dienų.

Jei pirmojo įvykio vėlyvoji pabaiga (T_{V1}) nėra lygi nuliui, reikia ieškoti skaičiavimo klaidos.

Įvykių rezervai $R_i = T_{Vi}\text{-}T_{Ai}$, $R_1 = 0$, $R_2 = 22$, $R_3 = 0$, $R_4 = 3$, $R_5 = 15$, $R_6 = 0$, $R_7 = 9$, $R_8 = 3$, $R_9 = 0$, $R_{10} = 0$ dienų.

Darbų laiko rezervus apskaičiuojame pagal formulę $R_{ai} = T_V - (T_A+t_i)$, T_V – įvykis, į kurį rodyklė nukreipta, T_A – įvykis, iš kurio rodyklė išeina:

$R_{a1} = 29 - (0+7) = 22$;

$R_{a2} = 8 - (0+8) = 0$;

$R_{a3} = 13 - (0+10) = 3$;

$R_{a4} = 41 - (7+12) = 22$;

$R_{a5} = 56 - (7+14) = 35$;

$R_{a6} = 41 - (10+16) = 15$;

$R_{a7} = 28 - (8+20) = 0$;

$R_{a8} = 28 - (10+15) = 3$;

$R_{a9} = 54 - (26+13) = 15$;

$R_{a10} = 54 - (28+17) = 9$;

$R_{a11} = 56 - (28+25) = 3$;

$R_{a12} = 49 - (28+21) = 0$;

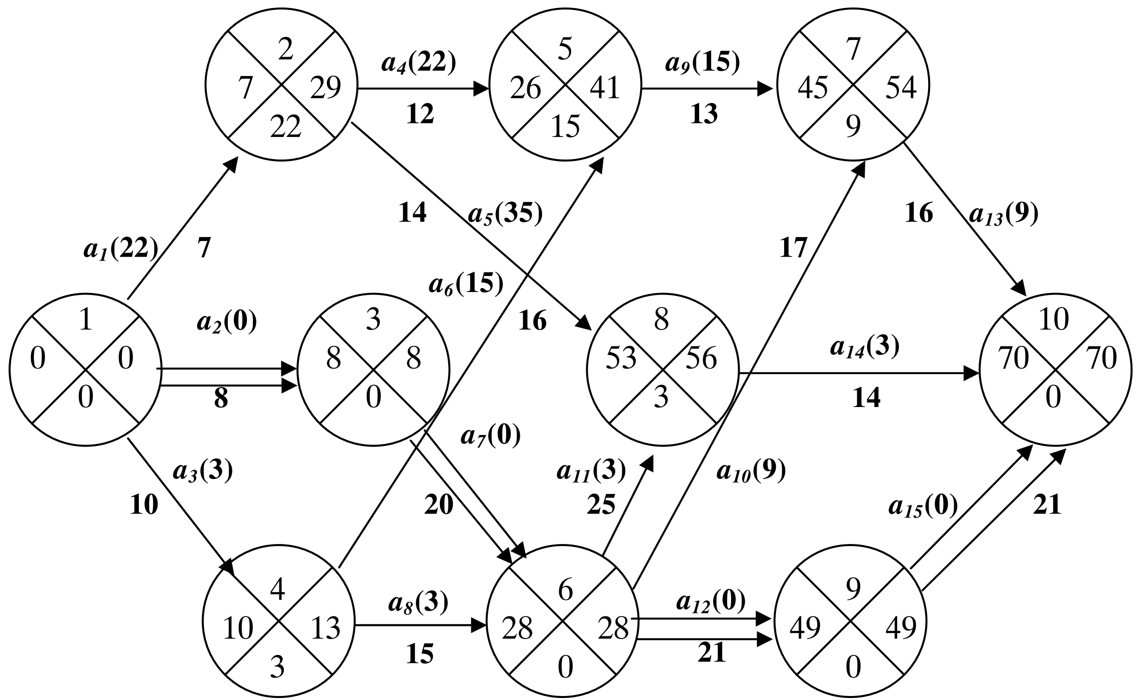
$R_{a13}= 70 - (45+16) = 9$;

$R_{a14} = 70 - (53+14) = 3$;

$R_{a15} = 0$ dienų.

Randame kritinį kelią. Į jį turi įeiti visi įvykiai, kurių $T_A = T_V$: 1, 3, 6, 9, 10, ir visi darbai, kurių laiko rezervai lygūs nuliui, t. y. a_2, a_7, a_{12}, a_{15}.

Žinant darbų laiko rezervus, galima tikslingai perskirstyti personalą ir materialines vertybes, kad bendras visų darbų atlikimo laikas nepasikeistų.



8 pav. **Tinklinio grafiko parametrai**

3.7. Tinklinio plano optimizacija

Skiriami du tinklinio plano optimizacijos etapai. Pirmame etape naudojamasi turimais laiko rezervais, antrame – papildomais laiko rezervais.

1. Panaudojant turimus rezervus:

- nustatoma, kokiais rezervais galima pasinaudoti;
- nagrinėjami kritiniai darbai;
- nustatomos naujos darbų trukmės;
- apskaičiuojami nauji plano parametrai;
- nusprendžiama, ar jie tenkina vadovą.

2. Pasitelkiant papildomus išteklius nustatoma:

- kokiems darbams jie reikalingi;
- kokie konkretūs ištekliai reikalingi;
- kada jie reikalingi;
- apskaičiuojami nauji plano parametrai;
- nusprendžiama, ar jie tenkina vadovą.

Analizuodami tinklinį grafiką (žr. 8 pav.), matome, kad visi darbai, kurie nėra kritiniame kelyje, turi laiko rezervus, nurodytus skliausteliuose. Šie rezervai reiškia, kad konkretus darbas gali būti pradėtas vėliau ar vykti ilgiau būtent tiek dienų, kiek tuose skliausteliuose nurodyta. Vadinasi, iš tokių darbų galima paimti dalį darbuotojų, techninių priemonių ar lėšų siekiant paspartinti darbų, esančių kritiniame kelyje, vykdymą. Žinoma, ne visada darbuotojams, atliekantiems konkrečius darbus, galima pavesti atlikti kritinius darbus, nes darbuotojai turi turėti tam tikrų žinių ir įgūdžių. Tačiau tokie darbuotojai gali atlikti paprastesnes, pagalbines funkcijas ir sutrumpinti kritinių darbų trukmę.

Tarkime, kad tokia darbuotojų rotacija galima vykdant kompleksą darbų, pateiktą 8 pav. Tada teisingi tokie teiginiai.

Pirma, kritinius darbus a_2, a_7 aprėpia darbai a_3, a_8, turintys 3 dienų laiko rezervą. Taigi, galima arba visą darbo a_3 laiko rezervą panaudoti tam, kad būtų sumažinta kritinio darbo a_2 trukmė, arba paskirstyti šį 3 dienų rezervą a_2 ir a_7 darbams. Darbo a_8 laiko rezervą galima panaudoti spartinant kritinį darbą a_7. Atkreipiame dėmesį į tai, kad darbų a_3 ir a_8 rezervai yra susiję tarpusavyje, t. y. iš šių darbų galima panaudoti tik tris dienas, sudarant tam tikrus derinius (paėmus 3 d. iš darbo a_3, darbo a_8 rezervas tampa lygus nuliui, todėl galimi rezervų variantai yra: trys dienos iš a_3 ir nulis iš a_8, viena diena iš a_3 ir dvi dienos iš a_8, dvi dienos iš a_3 ir viena diena iš a_8, nė vienos dienos iš a_3 ir trys dienos iš a_8).

Antra, kritinius darbus a_{12}, a_{15} lygiagrečiai aprėpia dvi grandys, sudarytos iš darbų a_{10}, a_{13} ir a_{11}, a_{14}. Pirmoje grandyje yra 9 d., antroje 3 d.

rezervai. Kadangi jie vyksta lygiagrečiai, jų rezervus galima sudėti, t. y. bendras rezervas yra lygus 12 dienų. Tų rezervų panaudojimo variantų jau yra žymiai daugiau.

Trečia, kritinius darbus a_8, a_{12}, a_{15} aprėpia darbai a_6, a_9, a_{13}, ir čia galima pasinaudoti 15 dienų darbų a_6 ir a_9 sąskaita.

Ketvirta, visus darbus, esančius kritiniame kelyje, aprėpia dvi grandys, sudarytos iš darbų a_1, a_4, a_9, a_{13} ir a_1, a_5, a_{14}. Čia galima panaudoti iki 35 dienų laiko rezervą, kurį turi darbas a_5.

Pereiname prie konkretaus išteklių (laiko rezervų) paskirstymo. Tarkim, visas komplektas darbų turi būti baigtas per 60 dienų, o ne 70, kaip tai parodyta 8 pav.

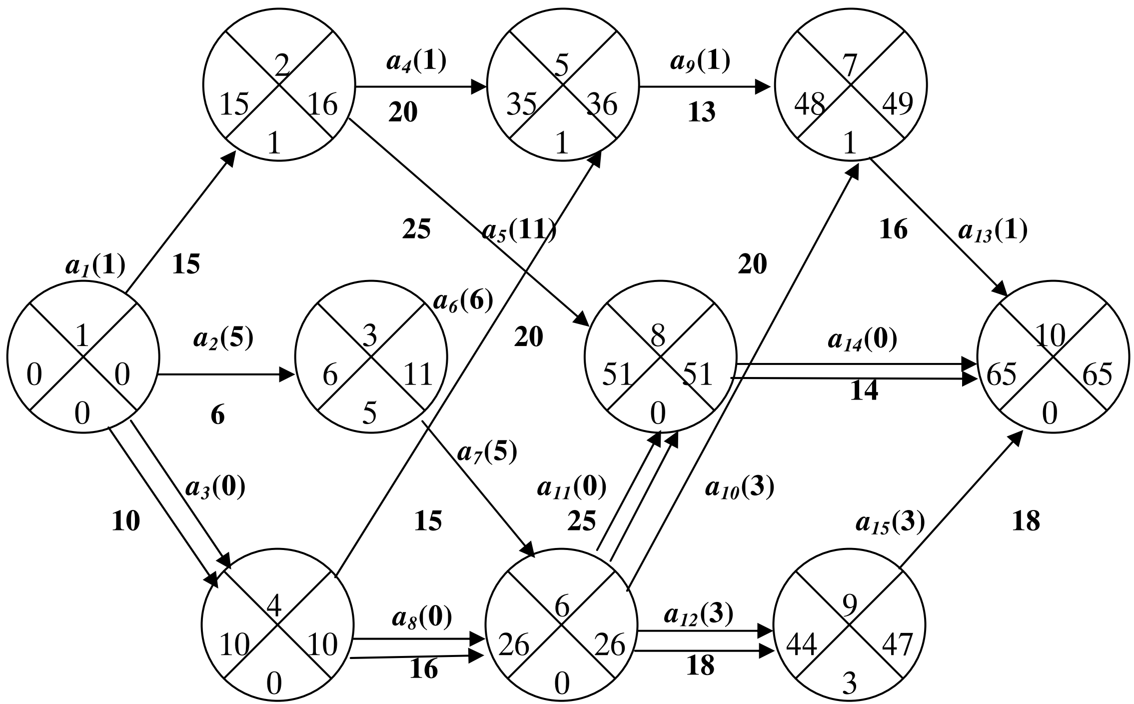
Sudarome specialią lentelę, kurioje pateiktos naujos darbų trukmės, panaudojus vieną išteklių paskirstymo variantą (žr. 3 lentelę). Iš naujo apskaičiuojame to tinklinio plano rezervus (9 pav.).

3 lentelė. **Išteklių paskirstymas**

Darbai	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
Pradinė darbų trukmė	7	8	10	12	14	16	20	15	13	17	25	21	16	14	21
Nauja darbų trukmė	15	6	10	20	25	20	15	16	13	20	25	18	16	14	11

Matome, kad bendra darbų trukmė sumažėjo iki 65 dienų. Kritiniame kelyje pasikeitė visi darbai. Dabar tai darbai a_3, a_8, a_{11}, a_{14}. Žymiai sumažėjo įvykių ir darbų rezervai. Tuos rezervus netikslinga dar labiau mažinti, išskyrus galbūt darbo a_5 rezervą (11 dienų). Darbams, nesantiems kritiniame kelyje, turi būti skirta pakankamai laiko rezervų, nes įgyvendinant šį planą jų gali prireikti. Kokio dydžio rezervus reikėtų turėti, priklauso nuo paprastųjų darbų nustatymo tikslumo ir tų darbų sudėtingumo. Bendras laiko rezervas turėtų sudaryti bent 10 proc. kritinio kelio ilgio, šiuo atveju tai 7 dienos, ir toks rezervas dar liko. Vadinasi, netikslinga toliau ieškoti būdų sumažinti kritinio kelio ilgį naudojant turimus rezervus.

Kadangi norimas rezultatas vis dar nepasiektas, reikia pereiti prie antro tinklinio plano optimizavimo etapo pasitelkiant papildomus išteklius. Šiuo atveju, kad nesikeistų kritinis kelias, tikslinga sumažinti darbų a_3 ir a_8 trukmę, tarkim, 3 dienomis, darbo a_{11} trukmę 2 dienomis ir darbo a_4 trukmę 5 dienomis. Tada gaunamas galutinis optimizuotas grafikas (siūloma skaitytojui pačiam išspręsti šį uždavinį kompiuteriu).



9 pav. **Patobulinto tinklinio grafiko parametrai panaudojus vidinius rezervus**

Tokiu būdu įvykdytas pagrindinis reikalavimas, kad visas kompleksas darbų būtų baigtas per 60 dienų. Tačiau įgyvendinant šį planą gali iškilti problemų, nes nekritiniai darbai turi gana mažus rezervus.

Įgyvendinant šį planą, vadovas turi visų pirma stebėti kritinius darbus a_3, a_8, a_{11} ir a_{14} ir, antra, darbus, kurių rezervai labai maži: a_4, a_9, a_{12}, a_{13} ir a_{15}. Tai didina vadovo krūvį, blaško jo dėmesį, todėl geriau, kai nėra daug darbų, turinčių mažas laiko atsargas.

Išnagrinėję konkretų pavyzdį, matome, kad tinklinio plano sudarymo, analizės ir optimizavimo etapai nėra sudėtingi, o gaunama nauda pranoksta visų kitų planų galimybes, todėl verta šią technologiją įsisavinti ir taikyti. Be to, čia smulkiai nagrinėjamas visas procesas ir numatomos gairės, kaip organizuoti ir kontroliuoti visus darbus.

3.8. Tinklinio grafiko analizė ir optimizacija Excel aplinkoje

Kompiuteris naudojamas sudarius tinklinį grafiką, perėjus prie jo analizės.

Keliami tokie analizės tikslai:

- Nustatyti viso nagrinėjamo komplekso darbų trukmę (toliau – darbų trukmę).
- Nustatyti tuos komplekso darbų sudedamuosius darbus (paprastuosius darbus), kurie yra labiausiai pažeidžiami, vadinamuosius kritinius darbus.
- Apskaičiuoti atskirų komplekso darbų įvykių (etapų) rezervus.
- Apskaičiuoti kiekvieno paprastojo darbo rezervą.
- Susieti visų darbų planą su konkrečiomis kalendorinėmis datomis.
- Nustatyti, kokius paprastuosius darbus ir kiek reikia trumpinti, norint sudaryti optimalų visų darbų atlikimo grafiką.

Atsakymai į šiuos ir kitus planavimo klausimus yra susiję su ganėtinai painia analize, reikalaujančia nesudėtingų, tačiau didelės apimties skaičiavimų.

Tokių apskaičiavimų metodai pateikti 3.6 šio darbo skyriuje.

Ši analizė tampa lengva ir net maloni, jeigu atliekama pasitelkus kompiuterį.

Tačiau tam būtina sukurti atitinkamą programą, kurios parengimo metodika čia ir dėstoma.

Siūloma metodika sudaryta iš kelių etapų.

Pirmame etape reikia:

- o Suskirstyti visą numatomų atlikti darbų kompleksą į paprasčiausius darbus. Tai darbai, kurių dėl tam tikrų priežasčių neverta toliau smulkinti. Tai daroma ir nenaudojant kompiuterio.
- o Nustatyti kiekvieno paprasčiausio darbo trukmę. Tai pradiniai vertinimai, kurie, sudarius kompiuterinį modelį, gali būti kaitaliojami daugybę kartų, nesirūpinant, kad tam reikės atlikti daugybę skaičiavimų, nes kompiuteris juos atliks labai greitai.
- o Nustatyti ryšį tarp visų paprastųjų darbų, t. y. kokie paprastieji darbai turi būti atlikti, kad būtų galima pradėti konkretų darbą.

Visą šią informaciją patogu pateikti specialioje lentelėje.

Šios metodikos taikymą tikslinga dėstyti pasitelkus konkretų pavyzdį (žr. 3.5 skyriaus 2 lentelę „Darbų sąrašas“ ir 10 pav.).

Minėtoje lentelėje paprastieji darbai pažymėti simboliu a_{ij}.

Sudaromas tinklinio grafiko analizės modelis. Šio modelio algoritmas sudarytas iš 6 dalių:

1. Duomenų parengimas.
2. Ankstyvųjų įvykių pabaigų apskaičiavimas.
3. Vėlyvųjų įvykių pabaigų apskaičiavimas.
4. Įvykių rezervų nustatymas.
5. Darbų rezervų nustatymas.
6. Kritinių darbų ir kritinio kelio nustatymas.

Atliekame kiekvienoje dalyje būtinus veiksmus.

1. Rengdami duomenis:

- Įjungiame Excel programą ir pasirenkame duomenų išdėstymo tvarką. Čia galimi įvairūs variantai, tačiau autorius pasirinko tokį: kiekvienam paprastajam darbui skirta viena eilutė. Stulpelyje pateiktos reikšmės pažymėtos paskutinėje (16) eilutėje.
- Tikslinga pakeisti paprastųjų darbų indeksus, nes kitaip formulėse sunku nustatyti, koks darbas po kurio eina ir kaip susiję darbai ir įvykiai: pvz., darbui a_1 priskiriamas simbolis $a_{1,2}$, darbui a_9– simbolis $a_{5,7}$ ir t. t. Atitinkamai darbų trukmėms irgi priskiriami tokie pat simboliai, pvz., darbo trukmei t_7 simbolis $t_{3,6}$. Priskiriant tokius simbolius svarbu vadovautis taisykle: pirmasis simbolis parodo, iš kokio įvykio išeina šis darbas, antrasis – į kokį įvykį jis ateina. Taip išsaugoma informacija apie darbų kryptį, kuri grafike žymima rodykle.
- Stulpelyje B surašome darbų indeksus, nes nėra reikalo rašyti visą darbo simbolį – jis pažymėtas 16 eilutėje.
- Stulpelyje C surašome darbų trukmes.

- Stulpelyje A surašome darbų, kurie turi būti atlikti anksčiau, simbolius. Tokia informacija yra 3.5 skyriaus 2 lentelės trečiame stulpelyje.

2. Ankstyvoji įvykio pabaiga apskaičiuojama pasitelkus formulę:

$$T_{Ak} = \max_i (t_{ik} + T_{Ai}), k = 2, 3, ... n, T_{A1} = 0, \qquad (1)$$

čia T_{Ak} – įvykio su numeriu k ankstyvoji pabaiga;

i – ankstesnių įvykių ir darbų, tiesiogiai susijusių su k įvykiu, reikšmės;

n – bendras įvykių skaičius.

Pirmojo įvykio ankstyvoji pabaiga visada lygi nuliui. Jis simbolizuoja darbų pradžią, kuri susiejama su konkrečia kalendorine data atlikus tinklinio grafiko analizę ir optimizavus jį.

Į stulpelį D surašome atitinkamas formules, gautas susiejus formulės (1) indeksus su konkrečiais darbais ir įvykiais. Pirmoje eilutėje užrašome 0, kaip tai pažymėta toje formulėje.

Antroje stulpelio D eilutėje surenkame formulę: $T_{A2} = t_{1,2} + T_{A1}$, atlikdami tokius veiksmus: pažymime langelį D2, spaudžiame klavišus Insert; function; sum; OK; C1(number 1); D1(number 2); OK. Matome skaičių 7. Analogiškus veiksmus atliekame langeliuose D3, D4 ir D9. Šiuose langeliuose nereikia ieškoti maksimumo, nes tie įvykiai priklauso tik nuo vieno darbo.

Likusieji įvykiai priklauso nuo dviejų ar trijų darbų. Įvykio eilutėje gretimuose langeliuose surašomos formulės, susijusios su vienu įtaką šiam įvykiui darančiu darbu, kitame gretimame langelyje su kitu, kol aprašomi visi įeinantys į tą įvykį darbai. Veiksmų seka apskaičiuojant penktojo įvykio ankstyvąją pabaiga yra tokia.

Pažymime langelį E5, spaudžiame klavišus Insert; function; sum; OK; C4 (number 1); D2 (number 2); OK. Matome skaičių 19. Apskaičiavome darbo $a_{2,5}$ įtaką.

Pažymime langelį F5, spaudžiame klavišus Insert; function; sum; OK; C6 (number 1); D4 (number 2); OK. Matome skaičių 26. Apskaičiavome darbo $a_{4,5}$ įtaką.

Pažymime langelį D5. Ieškome maksimumo iš skaičių langeliuose E5 ir F5. Spaudžiame klavišus Insert; function; max; OK; E5 (number 1); F5 (number 2); OK. Matome skaičių 26. Apskaičiavome penktojo įvykio ankstyvąją pabaigą.

Analogiškus veiksmus atliekame langeliuose D6:F9 ir D10:G10.

Rastos visų įvykių ankstyvosios pabaigos, surašytos langeliuose D1:D10.

3. Vėlyvoji įvykio pabaiga apskaičiuojama pasitelkus formulę:

$$T_{vk} = \min_j (T_{vj} - t_{kj}), j = n, n-1, ..., 2; k = n, n-1, ..., 1 , \qquad (2)$$

čia j – vėlesnių įvykių ir darbų, tiesiogiai susijusių su k įvykiu, reikšmės.

Paskutinio įvykio ankstyvoji ir vėlyvoji įvykių pabaigos sutampa, t. y. teisinga formulė

$$T_{vn} = T_{An}. \qquad (3)$$

Į I stulpelį surašome atitinkamas formules, gautas susiejus formulių (1) ir (3) indeksus su konkrečiais darbais ir įvykiais. Veiksmus reikia pradėti nuo paskutinio įvykio, nes formulė (3) įgalina paprastai apskaičiuoti paskutinio įvykio vėlyvąją pabaigą ir eiti įvykių numerių mažėjimo link.

Langelyje I10 užrašome formulę, nukopijavę ją nuo langelyje D10 jau sukurtos formulės, t. y. max(E10, F10, G10).

4. Įvykių rezervai apskaičiuojami pagal formulę

$$R_k = T_{vk} - T_{Ak}. \qquad (4)$$

Į stulpelį N surašome atitinkamas formules, gautas susiejus formulės (4) indeksus su konkrečiais įvykiais. Skaičiuoti galima bet kokia įvykių eilės tvarka. Pradedame nuo pirmojo įvykio (k = 1). Pirmoje N stulpelio eilutėje reikia surinkti formulę $R_1 = T_{V1} - T_{A1}$, atliekant tokius veiksmus: pažymime langelį N1, spaudžiame klavišus Insert; function; sum; OK; I1(number 1); -D1(number 2); OK.

Matome skaičių 0. Analogiškus veiksmus atliekame visuose N stulpelio langeliuose.

5. Darbų rezervai apskaičiuojami pagal formules

$$R_{a_{ij_{ij}}{}_{ij}} = T_{Vj} - T_{Ai} - t_{ij}. \qquad (5)$$

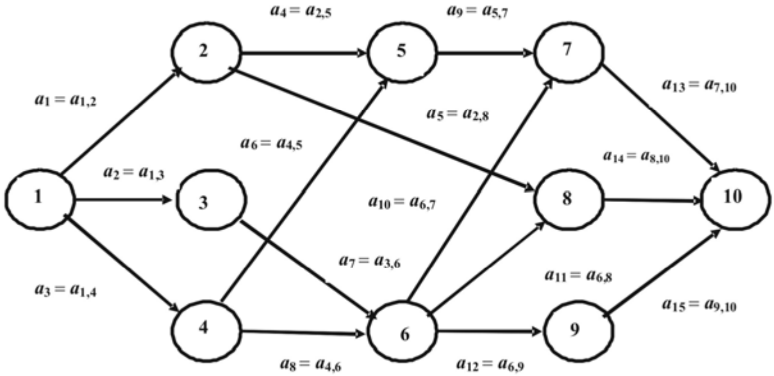
Į stulpelį P surašome atitinkamas formules, gautas susiejus formulės (5) indeksus su konkrečiais įvykiais. Pavyzdžiui, darbo $a_{6,8}$ rezervas apskaičiuojamas surinkus P stulpelio 11 eilutėje formulę $R_{a_{6,8}} = T_{V8} - T_{A6} - t_{6,8}$, atliekant tokius veiksmus: pažymime langelį P11, spaudžiame klavišus Insert; function; sum; OK; I8 (number 1); -D6 (number 2); -C11 (number 3); OK. Matome skaičių 3.

Analogiški veiksmai atliekami visuose kituose N stulpelio langeliuose.

6. Kritiniai darbai ir įvykiai nustatomi itin paprastai – jų rezervai lygūs nuliui.

Kritiniai darbai: suvedę stulpelyje C darbų trukmes, rasime atsakymus į visus dominančius klausimus: kritinio kelio trukmė, kritiniai darbai, įvykių ir darbų rezervai.

Kritiniai įvykiai (žr. stulpelio N reikšmes): 1, 3, 6, 9, 10. Kritinis kelias jungia visus įvykius ir darbus, kurių rezervai lygūs nuliui.



10 pav. **Tinklinio grafiko darbų indeksų sąsajos**

Renkant įvairias formules, galimos klaidos. Kai kurios iš jų gali būti lengvai nustatytos ir pašalintos. Pirma, atliekant bet kokius skaičiavimus negali atsirasti neigiamų skaičių. Antra, pirmojo įvykio ankstyvoji ir vėlyvoji pabaiga turi būti lygi nuliui. Trečia, paskutiniojo įvykio ankstyvoji ir vėlyvoji pabaiga turi būti vienodos. Ketvirta, įvedus kiekvieną formulę, reikia stebėti, ar neatsirado nepaaiškinamų kokių nors duomenų įvedimo paklaidų.

Ketvirtasis etapas. Šio etapo paskirtis – optimizuoti sudarytą viso komplekso darbų planą. Čia galima išskirti tokius veiksnius.

Pirma, reikia pasižiūrėti, kokia būtų viso komplekso darbų trukmė, jei susidarytų itin nepalankios sąlygos ir visi paprastieji darbai tęstųsi maksimaliai ilgai (pesimistinis variantas). Suvedę stulpelyje C pesimistines darbų trukmes, rasime atsakymus į visus dominančius klausimus: kritinio kelio trukmė, kritiniai darbai, įvykių ir darbų rezervai. Šio pesimistinio plano varianto parametrų nustatymas svarbus norint apsidrausti nuo visų galimų netikėtumų.

Antra, galima įvertinti ir optimistinį plano variantą, kai visų darbų trukmė yra minimali. Suvedę stulpelyje C optimistines darbų trukmes, rasime atsakymus į visus dominančius klausimus: kritinio kelio trukmė, kritiniai darbai, įvykių ir darbų rezervai. Šio plano realumas yra gana abejotinas, bet gali būti panaudotas kaip orientyras, pasakantis, kad geresnio varianto būti negali.

Trečia, jei atraminio plano, sudaryto remiantis preliminariai nustatytomis darbų trukmėmis, parametrai tenkina užsakovą, plano optimizacija laikoma baigta ir pereinama prie kalendorinio plano rengimo.

Ketvirta, jei atraminis planas nėra priimtinas, kruopščiai nagrinėjamas kiekvienas darbas, ieškant jų sutrumpinimo galimybių. Tarkime, perskirstant turimas pajėgas paprasčiausiems darbams atlikti, jų trukmė pasikeitė, ji nurodyta 4 lentelėje (tai 3.7 skyriaus 3 lentelė).

4 lentelė. **Darbų rezervų paskirstymas**

Darbai	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
Pradinė darbų trukmė	7	8	10	12	14	16	20	15	13	17	25	21	16	14	21
Nauja darbų trukmė	15	6	10	20	25	20	15	16	13	20	25	18	16	14	18

Suvedę stulpelyje C naujas darbų trukmes, paimtas iš 2 lentelės, rasime atsakymus į visus dominančius klausimus: kritinio kelio trukmė (65 d.), kritiniai darbai, įvykių ir darbų rezervai.

Penkta, įgyvendinant sudarytą planą, jei pasikeitė kokių nors darbų atlikimo reali trukmė, reikia įvesti tą pakitusią darbo trukmę į stulpelį P ir, neatlikę jokių papildomų veiksmų, gausime patikslintus plano parametrus. Tai ypač naudinga, nes nieko daugiau keisti nereikia.

Šešta, jei optimizavus planą jo parametrai nėra patenkinami, galima kreiptis paramos, nustačius, kokius darbus ir kiek reikia trumpinti bei kokių ir kada išteklių tam reikia. Tą galima nustatyti iš anksto, o tai itin svarbu.

3.9. Tinklinio plano taikymas

Sudarytą, išanalizuotą ir optimizuotą tinklinį grafiką praktiškai taikyti nepatogu. Jį būtina atitinkamai pertvarkyti, transformuoti ir suteikti jam optimalią formą. Tokia forma labiausiai primena Ganto grafiką, apie kurį buvo kalbėta šios temos pradžioje, tačiau tai kokybiškai kitoks grafikas, nes atlikti optimizavimo veiksniai, kurie sudarant Ganto grafiką neatliekami.

Optimizuotas tinklinis planas pertvarkomas tokiu būdu.

Pirma, pasirenkama horizontali laiko ašis, ant kurios pažymimi laiko tarpsniai, apimantys visą komplekso darbų trukmę.

Antra, numatomos atskiros laiko ašys kiekvienai darbų vykdytojų grupei. Jei kiekvieną paprastąjį darbą atlieka vienas vykdytojas ar viena vykdytojų grupė, tai tokių laiko ašių skaičius lygus paprastųjų darbų skaičiui. Tos ašys išdėstomos virš pagrindinės laiko ašies atsižvelgiant į paprastųjų darbų eiliškumą.

Trečia, paprastajam darbui skirtoje ašyje griežtai prisilaikant mastelio rodykle pažymima to darbo trukmė, pradedant nuo momento, kada tas darbas gali būti pradėtas. Jei tas darbas turi rezervą, tai rezervo trukmė parodoma punktyrine rodykle nuo planuojamos to darbo pabaigos. Tos punktyrinės arba vientisos rodyklės gale kartais verta parašyti ir skaičių, žymintį to darbo pabaigą.

Ketvirta, kartu su paprastaisiais darbais tikslinga parodyti ir įvykius, nes jie nustato tam tikrų etapų pabaigas.

Penkta, baigus kurti visų paprastųjų darbų ir įvykių vaizdą, žemiau pagrindinės laiko ašies reikia nubrėžti dar vieną ašį, kurioje žymimos kalendorinės darbų eigos datos. Ant šios ašies matomos išeiginės, šventinės dienos bei kiekvienos darbo dienos trukmės, vadinasi, matosi, kokia yra situacija bet kokiu kalendoriniu laiko momentu. Tinklinio grafiko pertvarkytas planas, pasitelkus 8 pav. pateiktą tinklinio plano pavyzdį, parodytas 11 pav.

Pateikto 11 pav. plano grafikas turi šiuos akivaizdžius pranašumus:

1. Aiškiai matosi, kada kiekvienas paprastasis darbas turi būti pradėtas ir baigtas.

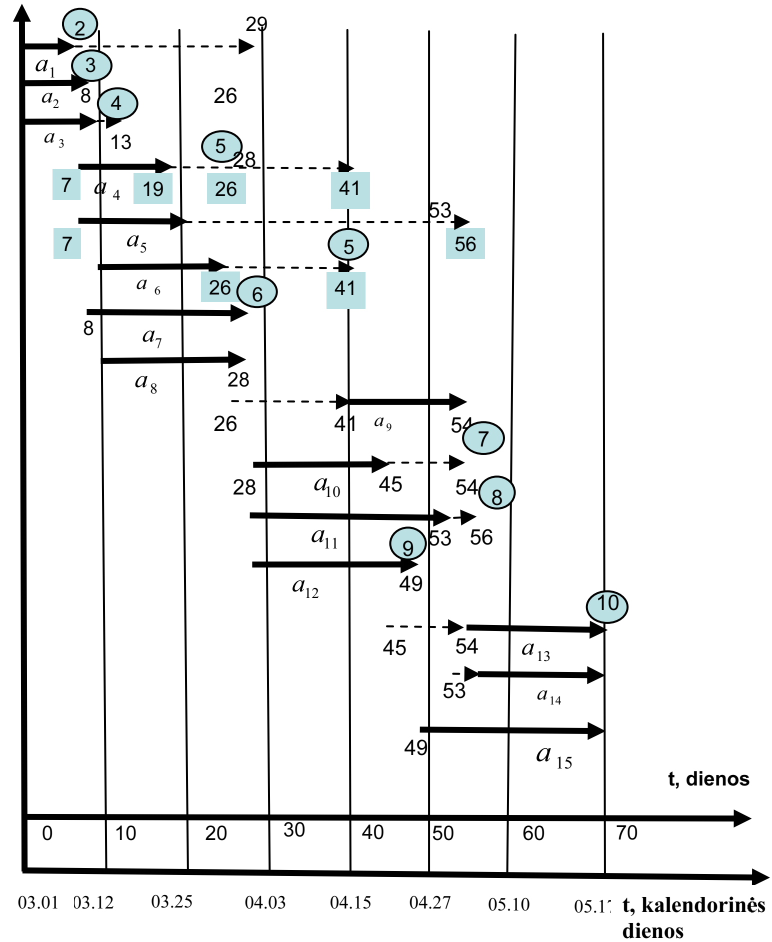
2. Suprantama paprastųjų darbų rezervų esmė. Jie nustato ribinius darbų baigties momentus.

3. Vykdytojai, kurie tam tikrais laiko tarpsniais neturi darbo, gali būti paskirti atlikti kitus darbus, nesusietus su šiuo kompleksu. Vadinasi, personalas gali dirbti daug efektyviau.

4. Vadovas gali lengvai nustatyti, ar viskas vyksta pagal planą, ir imtis priemonių, jei bręsta nepalankios aplinkybės, galinčios sutrukdyti laiku baigti visus darbus.

5. Vadovas turi tikslius duomenis, reikalingus darbams organizuoti, ir gali koreguoti jų eigą.

6. Nesudėtinga nustatyti, kokiems darbams ir kada gali prireikti paramos.



11 pav. **Kalendorinis tinklinis planas (Ganto grafiko modifikacija)**

7. Matosi kritiniai, neturintys rezervų darbai, vadinasi, vadovas žino, kad būtent jiems reikia skirti daug dėmesio.

8. Vadovas mato, kokius rezervus ir kokiems darbams atlikti jis gali panaudoti.

9. Bet kurio lygmens vadovui toks planas suprantamas, nesunku jį pristatyti bei pagrįsti.

5 lentelė. **Tinklinio grafiko, pateikto 8 pav., parametrų apskaičiavimai kompiuteriu**

	A	B	C	D	E	F	G	I	J	K	L	N	O	P
1		1; 2	7	0				0	22	0	3	0	1; 2	22
2		1; 3	8	7				29	42	29		22	1; 3	0
3		1; 4	10	8				8				0	1; 4	3
4	$a_{1,2}$	2; 5	12	10				13	25	13		3	2; 5	22
5	$a_{1,2}$	2; 8	14	26	19	26		41				15	2; 8	35
6	$a_{1,4}$	4; 5	16	28	28	25		28	37	31	28	0	4; 5	15
7	$a_{1,3}$	3; 6	20	45	39	45		54				9	3; 6	0
8	$a_{1,4}$	4; 6	15	53	21	53		56				3	4; 6	3
9	$a_{2,5}$; $a_{4,5}$	5; 7	13	49				49				0	5; 7	15
10	$a_{3,6}$; $a_{4,6}$	6; 7	17	70	61	67	70	70				0	6; 7	9
11	$a_{3,6}$; $a_{4,6}$	6; 8	25										6; 8	3
12	$a_{3,6}$; $a_{4,6}$	6; 9	21										6; 9	0
13	$a_{5,7}$; $a_{6,7}$	7; 10	16										7; 10	9
14	$a_{2,8}$; $a_{6,8}$	8; 10	14										8; 10	3
15	$a_{6,9}$	9; 10	21										9; 10	0
16	a_{ij}	a	t, dienos	Tak	Vak1	Vak2	Vak3	Tvk	Tvk1	Tvk2	Tvk3	Rak	a	Rtij

Kaip ir bet kuris planas, tinklinis planas turi trūkumų. Didžiausias trūkumas yra susijęs su tuo faktu, kad paprastųjų darbų trukmės nustatomos netiksliai, todėl suplanuoti darbai gali nukrypti nuo grafiko. Šio veiksnio įtaka gali būti maksimaliai sumažinta, jei naudojamasi nustatytais normatyvais, atsižvelgiama į darbuotojų kvalifikaciją, naudojamasi ekspertų vertinimais. Tačiau ir tokiu atveju suplanuoti darbai faktiškai atliekami per apskaičiuotą kritinio kelio trukmę su tikimybe 0,5. Norint apskaičiuoti didesnę komplekso darbų baigties tikimybę, sakykim, 0,95 (toks patikimumo lygmuo dažnai naudojamas atliekant socialinius tyrimus), reikia įvertinti paprastųjų darbų, ypač esančių kritiniame kelyje, trukmių standartinius nuokrypius ir apskaičiuoti kritinio kelio trukmę pridedant prie to kelio trukmės vidurkio du suminius kritiniame kelyje esančių darbų standartinius nuokrypius. Smulkiau išnagrinėti šį atvejį nėra galimybės dėl ribotos vadovėlio apimties.

Savitikros užduotys

1. Teoriniai klausimai:

1.1. Kokie darbai atliekami priimant sprendimus?

1.2. Apibūdinkite sprendimų priėmimo tvarką.

1.3. Kokie yra valdymo ciklo etapai?

1.4. Apibrėžkite planavimo turinį.

1.5. Apibūdinkite plano formų įvairovę.

1.6. Atskleiskite Ganto grafiko esmę.

1.7. Kokia tinklinio planavimo esmė?

1.8. Papasakokite apie tinklinio plano galimybes.

1.9. Apibūdinkite darbo, fiktyvaus darbo, įvykio, tinklinio grafiko ir kritinio kelio sampratas.

1.10. Kokia yra tinklinio grafiko sudarymo tvarka?

1.11. Kas nustatoma analizuojant tinklinį grafiką?

1.12. Apibūdinkite ankstyvąją ir vėlyvąją įvykių pabaigas.

1.13. Kaip apskaičiuojami ir panaudojami įvykių ir darbų rezervai?

1.14. Koks yra tinklinio plano optimizacijos turinys?

1.15. Kaip galima panaudoti turimus rezervus?

1. Praktinės užduotys:

2.1. Naudodamiesi aprašyta kompiuterine programa, apskaičiuokite tekste pateikto tinklinio plano pavyzdžių parametrus:

- kai darbų trukmės yra surašytos 2 lentelėje;

- panaudojus darbų rezervus, kaip tai parodyta 3.7 skyriaus 3 lentelėje.

2.2. Apskaičiuokite tinklinio plano parametrus, darbų sąrašas pateiktas 6 lentelėje.

6 lentelė. **Darbų sąrašas**

Paprastieji darbai	**Trukmė, dienos**	**Prieš tai atliekami darbai**	**Darbų indeksai (kompiuteriui)**
a_1	15	-	$a_1 = a_{1,2}$
a_2	6	-	$a_2 = a_{1,3}$
a_3	10	-	$a_3 = a_{1,4}$
a_4	20	a_1	$a_4 = a_{2,5}$
a_5	25	a_1	$a_5 = a_{2,8}$
a_6	20	a_3	$a_6 = a_{4,5}$
a_7	15	a_2	$a_7 = a_{3,6}$
a_8	16	a_3	$a_8 = a_{4,6}$
a_9	13	a_4, a_6	$a_{5,7}$
a_{10}	20	a_7, a_8	$a_{10} = a_{6,7}$
a_{11}	25	a_7, a_8	$a_{11} = a_{6,8}$
a_{12}	18	a_7, a_8	$a_{12} = a_{6,9}$
a_{13}	16	a_9, a_{10}	$a_{13} = a_{7,10}$
a_{14}	14	a_5, a_{11}	$a_{14} = a_{8,10}$
a_{15}	18	a_{12}	$a_{15} = a_{9,10}$

Skaičiuokite raštu ir kompiuteriu. Padarykite išvadas.

2.3. Sudarykite tinklinį grafiką, apskaičiuokite jo parametrus raštu ir kompiuteriu, padarykite atitinkamas išvadas. Reikalingų darbų sąrašas pateiktas 7 lentelėje.

7 lentelė. **Darbų sąrašas**

Paprastieji darbai	**Trukmė, dienos**	**Prieš tai atliekami darbai**	**Darbų indeksai** (kompiuteriui)
a_1	14	-	
a_2	20	-	
a_3	25	-	
a_4	0	a_2	
a_5	17	a_1, a_{19}	
a_6	0	a_1, a_{19}	
a_7	24	a_2	

a_8	13	$a_{3,}$ a_4	
a_9	25	$a_{3,}$ a_4	
a_{10}	0	a_6 , a_7 , a_8	
a_{11}	26	a_5 , a_{10}	
a_{12}	17	a_5 , a_{10}	
a_{13}	17	a_6 , a_7 , a_8	
a_{14}	20	a_9	
a_{15}	23	a_9	
a_{16}	23	a_{11} , a_{14}	
a_{17}	0	a_{11} , a_{14}	
a_{18}	14	a_{12} , a_{15} , a_{17}	
a_{19}	10	a_9	

4 TEMA

MASINIO APTARNAVIMO SISTEMOS (MAS)

4.1. Uždaviniai, sprendžiami remiantis masinio aptarnavimo teorija

Žmogaus arba kolektyvų veikla dažnai susijusi su įvairių rūšių aptarnavimo sistemomis. Tokių pavyzdžių yra daug: telefono stotis, remonto punktas, valdymo punktas, oro uostas, buitinio aptarnavimo kombinatas, bilietų kasos ir pan. Kiekvienoje iš tų sistemų galima išskirti tokias tos sistemos dalis, kurios atlieka griežtai apibrėžtas funkcijas kokio nors išorinio objekto atžvilgiu, pvz., aptarnaujančio kombinato batsiuvys tam tikrais įrankiais taiso kliento batus; bilietų kasos kasininkė kompiuteriu bei kita įranga nustato turimų bilietų aibę; pasiūlo klientui labiausiai priimtiną bilietą ir t. t.

Minėtos arba kitokios sistemos, į kurias kreipiasi daug klientų, vadinamos masinio aptarnavimo sistemomis (MAS). Vertinant tokių sistemų darbą, taikoma gerai parengta masinio aptarnavimo teorija.

Norint pasinaudoti šia teorija, reikia žinoti pagrindines jos sampratas.

4.2. Pagrindinės sampratos

Aptarnavimo kanalas – minimalus žmonių arba (ir) techninių priemonių skaičius, galintis aptarnauti vieną paraišką. Pagal šią sampratą MAS skirstomos į vienkanales ir daugiakanales sistemas.

Paraiška – kliento poreikis atlikti kokią nors operaciją (sujungti su reikiamu abonentu, suderinti muzikos instrumentą, suremontuoti kokį nors prietaisą ir pan.).

Paraiškų srautas – paraiškų pasiskirstymas laiko atžvilgiu. Kiekvienos paraiškos pateikimo momentas yra atsitiktinis dydis, todėl visas srautas apibūdinamas naudojantis atsitiktinių procesų teorija. Paraiškų srautas gali paklusti įvairiems pasiskirstymo dėsniams. Labiausiai paplitę Puasono, Palmos, Erlango dėsniai. Pastarasis dar taikomas įvairių lygių srautams.

Įvykių srautas – MAS būsenos pasiskirstymas laiko atžvilgiu.

MAS būsena – tos sistemos aptarnavimo kanalų užimtumas ir paraiškų, laukiančių eilėje, skaičius. MAS būsena keičiasi, diskrečiai pateikus kitą paraišką arba baigus aptarnauti kokią nors paraišką.

Paraiškų srauto intensyvumas – vidutinis paraiškų skaičius per vieną laiko vienetą.

Vienos paraiškos aptarnavimo laikas – laikas nuo paraiškos aptarnavimo pradžios iki jos pabaigos. Šis laikas yra atsitiktinis dydis. Jis yra pasiskirstęs pagal rodiklinį, beta arba kitus dėsnius.

MAS aptarnavimo geba – vidutinis aptarnautų paraiškų skaičius per vieną laiko vienetą.

Prireikus bus pateiktos kitos sampratos.

4.3. MAS galimybės

Masinio aptarnavimo teorija leidžia sužinoti:

- kiek paraiškų bus aptarnauta per vieną laiko vienetą,
- kiek vidutiniškai aptarnaujančių kanalų bus užimta,
- kokią laiko dalį sistema neturės darbo,
- kiek vidutiniškai paraiškų lauks eilėje ir t. t.

Tai tiesioginė sistemos analizė, leidžianti įvertinti konkrečios sistemos darbo efektyvumą.

Ši teorija leidžia spręsti ir sudėtingesnius klausimus, susijusius su MAS sinteze.

Ją pasitelkus galima

- optimizuoti aptarnaujančių kanalų skaičių,
- užtikrinti kiekvieno kanalo techninį aprūpinimą,
- rekomenduoti vienos paraiškos vidutinį aptarnavimo laiką,
- nustatyti racionalią paraiškų aptarnavimo tvarką,
- pagrįsti vietų, kuriose paraiškos gali laukti aptarnavimo pradžios, skaičių,
- spręsti kitus klausimus.

Masinio aptarnavimo teorija neturi specialių optimizavimo metodų.

Čia paminėta optimizacija yra daugiau praktinė, bet užtat visada turi labai gerai suprantamą fizinę prasmę.

4.4. Procesai, vykstantys masinio aptarnavimo sistemoje

Bet kurios MAS darbas sudarytas iš į šią sistemą patenkančių paraiškų aptarnavimo ciklų. Paraiškos į MAS patenka viena po kitos atsitiktiniais laiko momentais. Aptarnavimo trukmė yra atsitiktinė. Likęs laisvas aptarnavimo kanalas gali pradėti aptarnauti kitą paraišką.

Kadangi paraiškų srautas ir kiekvienos paraiškos aptarnavimo laikas yra atsitiktiniai procesai, tai MAS veikla gali būti nagrinėjama tik pasitelkus atsitiktinių procesų teoriją. Norint racionaliai organizuoti tos sistemos darbą, šį procesą reikia apibūdinti matematinėmis lygtimis ir išnagrinėti jas. Kad tokia analizė būtų įmanoma praktiškai, būtina supaprastinti toje sistemoje vykstančius procesus. Teorija teigia, kad jei šis procesas paklūsta Markovo proceso reikalavimams, tai ganėtinai lengvai jį galima apibūdinti paprastomis diferencialinėmis, kartais ir tiesinėmis lygtimis, o MAS efektyvumo rodiklius išreikšti pasinaudojus tos sistemos ir paraiškų srauto parametrais. Tarkime, kad nagrinėjamais atvejais MAS galima taikyti Markovo atsitiktinių procesų teoriją.

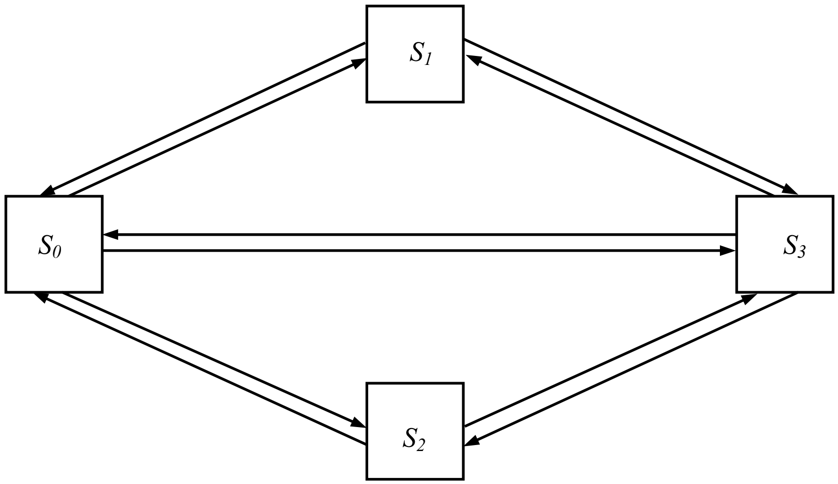
4.5. Markovo procesas su diskrečiosiomis būsenomis

Atsitiktinis procesas vadinamas Markovo procesu, jei jam būdinga ši savybė: bet kuriuo momentu t_0 tikimybė, kad ateityje MAS bus konkrečios būsenos P ($t > t_0$), priklauso nuo šios sistemos dabartinės būsenos ir nepriklauso nuo to, kaip sistema pateko į šią būseną. Vadinasi, galima nekreipti dėmesio į tai, kaip procesas vyko anksčiau.

Ganėtinai dažnai procesai, vykstantys MAS, be didelės paklaidos gali būti laikomi paklūstančiais Markovo proceso reikalavimams.

Atsitiktinis procesas vadinamas diskrečiųjų būsenų procesu, jeigu tas būsenas (S_1, S_2, S_3, ...) galima išvardyti ir jei sistema staigiai peršoka iš vienos būsenos į kitą. Tokius procesus patogu pavaizduoti grafiškai, vadinamuoju ***būsenų grafu.*** Kiekviena būsena gali būti pavaizduota stačiakampiu, perėjimas iš būsenos į būseną – rodykle.

Tarkime, yra sistema S – aptarnavimo punktas, turintis dvi aptarnavimo vietas. Ši sistema gali būti 4 būsenų: S_0 – abi aptarnavimo vietos laisvos, S_1 – pirma vieta laisva, antra užimta, S_2 – pirma vieta užimta, antra laisva, S_3 – abi vietos užimtos (1 pav.).



1 pav. **Aptarnavimo punkto būsenų grafas**

Pokyčiai šioje sistemoje gali įvykti tiksliai nustatytais laiko momentais arba bet kada. Pirmuoju atveju kalbama apie ***diskretųjį*** laiką, antruoju – apie tolydųjį laiką. Dažniausiai tenka nagrinėti sistemas, kurių būsena keičiasi atsitiktiniais laiko momentais. Tokie procesai vadinami ***tolydžiąja Markovo grandimi.*** Galima apskaičiuoti tikimybes, kad sistema kuriuo nors metu yra konkrečios mus dominančios būsenos, pvz., visi kanalai laisvi, visi kanalai užimti ir t. t. Tos tikimybės ypač lengvai apskaičiuojamos, jei paraiškų srautas yra ***paprasčiausias***, o kiekvienos paraiškos aptarnavimo laikas paklūsta ***rodikliniam*** dėsniui.

4.6. Paprasčiausias paraiškų srautas

Srautas vadinamas paprasčiausiu arba stacionariu Puasono srautu, jei pasižymi 3 savybėmis:

- o yra stacionarus,
- o nepriklausomas
- o ir ordinarus.

Srautas yra ***stacionarus***, jei tikimybė, kad tam tikras paraiškų skaičius pateks į sistemą per laiko tarpą Δt, priklauso nuo to laiko trukmės ir nepriklauso nuo to, kurioje laiko ašies vietoje yra intervalas Δt.

Srautui būdinga ***nepriklausomumo*** savybė, jei paraiškų, patenkančių į bet kuriuos du nesikertančius laiko intervalus, skaičius nepriklauso nuo to, kiek paraiškų pateko į vieną iš tų intervalų. Tai reiškia, kad paraiškos pateikiamos nepriklausomai viena nuo kitos.

Srautas yra ***ordinarus***, jei tikimybė, kad elementariojo laiko intervale Δt bus ne mažiau kaip dvi paraiškos, yra be galo maža, palyginti su tikimybe, kad jame bus viena paraiška.

Esant Puasono srautui tikimybė, kad per kokį nors trumpą laiką į sistemą atvyks m paraiškų, yra:

$$P_m = \frac{a^m}{m!}\, e^{-a}, \quad m = 0, 1, ..., a = \lambda \cdot \Delta t ; \qquad (1)$$

čia a – vidutinis paraiškų skaičius Δt laiko intervale; λ – paraiškų srauto intensyvumas.

Puasono srautas turi dar vieną svarbią savybę: laiko tarpas tarp gretimų paraiškų yra pasiskirstęs pagal rodiklinį skirstinį. Tai reiškia, kad to laiko tarpo T pasiskirstymo funkcija

$$F(t) = P\,(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t > 0\,, \qquad (2)$$

o tankio funkcija

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0\,. \qquad (3)$$

Svarbu, kad rodiklinio skirstinio vidurkis ir standartinis nuokrypis yra vienodi, t. y.

$$m = \sigma = \frac{1}{\lambda}\,. \qquad (4)$$

Paprasčiausias paraiškų srautas yra reikšmingas dar ir todėl, kad jeigu į sistemą atvyksta ne vienas paraiškų srautas ir kiekvienas iš jų paklūsta individualiam dėsniui, tai bendras srautas be didelės paklaidos gali būti laikomas Puasono srautu. Ši paklaida mažėja didėjant į sistemą atvykstančių srautų skaičiui.

4.7. Masinio aptarnavimo sistemų klasifikacija

Yra du pagrindiniai MAS tipai:

- pirmo tipo MAS pasižymi tuo, kad paraiška, į sistemą atvykstanti tuo momentu, kai visi aptarnavimo kanalai užimti, nelaukia, kol bus aptarnauta, ir iš sistemos dingsta. Tokios sistemos vadinamos

sistemomis be eilės arba su atsaku. Viena iš tokių sistemų yra telefono stotis: jei abonento numeris užimtas, girdime trumpus signalus, ir mūsų paraiška nebus vykdoma;
- antro tipo masinio aptarnavimo sistemų dalį sudaro tokios sistemos, kuriose paraiška tam tikrą laiko tarpą laukia, kol bus pradėta aptarnauti. Jos vadinamos sistemomis su eile. Tai įvairių rūšių bilietų kasos, remonto dirbtuvės, kirpyklos ir pan.

Masinio aptarnavimo sistemos su eile savo ruožtu skirstomos pagal įvairius požymius:

1. Pagal paraiškų eilėje laukimo laiką:
   - į riboto
   - ir begalinio laukimo sistemas.
2. Pagal paraiškų aptarnavimo eiliškumą:
   - į aptarnaujamas iš eilės,
   - į aptarnaujamas atsitiktinai pasirenkant,
   - į aptarnaujamas atrenkant paraiškas pagal prioritetus.
3. Pagal paraiškų laukimo eilėje tvarką:
   - į laukiančias ne ilgiau kaip tam tikrą nustatytą laiką,
   - į laukiančias priklausomai nuo eilės ilgio,
   - į laukiančias priklausomai nuo laukimo vietų ir t. t.

Visos tokio tipo sistemos yra vadinamos sistemomis su eile.

Sistemos be eilės ir sistemos su eile dar yra skirstomos:

4. Pagal aptarnaujančių kanalų skaičių:
   - į vienkanales
   - ir daugiakanales.
5. Pagal kanalų našumą:
   - į vienodo
   - ir skirtingo našumo.

Šiuo metu masinio aptarnavimo teorija yra išplėtota, išnagrinėti labai specifiški atvejai, todėl pateikta klasifikacija nėra išsami. Tačiau, taikant šios teorijos rekomendacijas vadyboje, nebūtina gilintis į šių metodų įvairovę.

Pradėsime nuo paprasčiausio atvejo, kai turime vienkanalę masinio aptarnavimo sistemą be eilės.

4.8. Vienkanalė masinio aptarnavimo sistema be eilės

Tarkime, kad MAS turi tik vieną aptarnavimo kanalą. Paraiška, patekusi į sistemą, esant užimtam kanalui, iš sistemos pasitraukia. Sakykime, paraiškų srautas paklūsta Puasono dėsniui, kurio intensyvumas yra λ , paraiškos aptarnavimo laikas turi rodiklinį skirstinį, kurio intensyvumas yra $\mu = \frac{1}{\bar{t}_{ap}}$, čia $\bar{t}_{ap}$ – vidutinė paraiškos aptarnavimo trukmė.

Pagrindiniai šios sistemos darbo rodikliai apskaičiuojami taip.

Tikimybė, kad sistema šiuo momentu yra laisva ir, vadinasi, atvykusi paraiška bus aptarnauta, vadinama ***santykine sistemos aptarnavimo geba***, kuri apibūdina sistemos darbo efektyvumą. Ši tikimybė gali būti interpretuojama kaip aptarnautų paraiškų dalis.

Pažymėję santykinę aptarnavimo gebą raide q , nustatome, kad

$$q = \frac{\mu}{\lambda + \mu}. \tag{5}$$

Taip pat svarbu žinoti, kiek vidutiniškai paraiškų bus aptarnauta per vieną laiko vienetą, t. y. ***absoliučiąją sistemos aptarnavimo gebą*** (N):

$$N = \lambda \cdot q. \tag{6}$$

Reikšmingas MAS rodiklis yra ***vidutinė neaptarnautų paraiškų dalis*** P_{ats} (atsako tikimybė):

$$P_{ats} = 1 - q = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \tag{7}$$

Taigi sudarytos paprastos formulės, pagal kurias galima apskaičiuoti santykinę ir absoliučiąją sistemos aptarnavimo gebą ir neaptarnautų paraiškų dalį. Šie rodikliai leidžia įvertinti sistemos darbą ir keisti jos parametrus, jei jie mūsų netenkina.

Uždavinys 4.1. Tarkime, nagrinėjamas vienkanalės telefono stoties darbas. Paraiška (skambutis), pateikiama tuo metu, kai linija užimta, neaptarnaujama. Sakykime, skambučių intensyvumas $\lambda = 2$, t. y. 2 skambučiai per minutę. Vienas pokalbis vidutiniškai trunka 3 min. ($\bar{t}_{ap} = 3$ min.). Abu srautai – paraiškų ir aptarnavimo – paklūsta Puasono dėsniui. Reikia apskaičiuoti santykinę ir absoliučiąją sistemos aptarnavimo gebą ir atsako tikimybę sistemai veikiant gana ilgą laiką.

Sprendimas. Nustatome aptarnaujamų paraiškų intensyvumą:

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{ap}} = \frac{1}{3} \text{ skamb. per min.}$$

Santykinė aptarnavimo geba

$$q = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\frac{1}{3}}{2 + \frac{1}{3}} = 0{,}143.$$

Vadinasi, sistema aptarnauja 14,3 proc. visų paraiškų, t. y. kad abonentai būtų sujungti, tą patį numerį reikia surinkti vidutiniškai 7 kartus (1/0,143).

Absoliuti aptarnavimo geba

$N = \lambda q = 2 \cdot 0{,}143 = 0{,}286$ pokalbio per min.

Stotis aptarnauja vidutiniškai 0,286 pokalbio per minutę.

Atsako tikimybė

$P_{ats} = 1 - q = 0{,}857$,

t. y. 85,7 proc. skambučių nebus aptarnauti.

4.9. Daugiakanalė masinio aptarnavimo sistema be eilės

Tarkime, yra n aptarnaujančių kanalų.

Sistemos darbą apibūdina tokie rodikliai.

Tikimybė, kad sistemoje yra lygiai k paraiškų, nustatoma taip:

$$P_k = \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} P_0, \quad k = 1, 2, ..., n, \tag{8}$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda/\mu}{1!} + \frac{(\lambda/\mu)^2}{2!} + ... + \frac{(\lambda/n)^n}{n!}}. \tag{9}$$

P_0 yra tikimybė, kad visi aptarnavimo kanalai laisvi.

Tikslinga λ/μ apskaičiuoti atskirai ir pažymėti, pvz., koeficentu:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu}. \tag{10}$$

Tada (8) ir (9) formules galima parašyti taip:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0, \tag{11}$$

$$P_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} \right)^{-1} . \qquad (12)$$

Dabar galima nustatyti santykinę ir absoliučiąją sistemos aptarnavimo gebą (q ir N) ir atsako tikimybę (P_{ats}).

Tikimybė, kad paraiška nebus aptarnaujama, yra lygi tikimybei, kad visi sistemos kanalai yra užimti, t. y.

$$P_{ats} = P_n = \frac{\alpha^n}{n!} P_0 . \qquad (13)$$

Santykinė aptarnavimo geba

$$q = 1 - P_n . \qquad (14)$$

Absoliuti sistemos aptarnavimo geba

$$N = \lambda q = \lambda(1 - P_n) . \qquad (15)$$

Šiuo atveju galima apskaičiuoti ir vidutinį užimtų kanalų skaičių:

$$\bar{n} = \frac{N}{\mu} = -\frac{\lambda(1 - P_n)}{\mu} = \alpha(1 - P_n) . \qquad (16)$$

Dalis užimtų kanalų $\delta = \frac{\bar{n}}{n}$.

Uždavinys 4.2. Tarkime, kad teisingos 4.1 uždavinio sąlygos (λ = 2 skambučiai per minutę, $\bar{t}_{ap}$ = 3 min.), tik vietoj vieno aptarnaujančio kanalo yra 4 (n = 4). Reikia apskaičiuoti santykinę ir absoliučiąją nuolat veikiančios sistemos aptarnavimo gebą, atsako tikimybę ir vidutinį užimtų kanalų skaičių.

Sprendimas. Apskaičiuojame koeficientą

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot \bar{t}_{ap} = 2 \cdot 3 = 6 .$$

Atsako tikimybė

$$P_{ats} = P_4 = \frac{\alpha^4}{4!} P_0 .$$

Apskaičiuojame tikimybę, kad laisvi visi aptarnavimo kanalai (sistemoje nėra nė vienos paraiškos):

$$P_0 = \frac{1}{1+\frac{\alpha}{1!}+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^4}{4!}} = \frac{1}{1+6+18+36+54} = \frac{1}{115} = 0{,}0087.$$

Atsako tikimybė

$$P_4 = P_{ats} = \frac{6^4}{4!}\cdot 0{,}0087 = \frac{54}{115} = 0{,}47.$$

Matome, kad esant net keturiems aptarnavimo kanalams beveik kas antra paraiška nebus aptarnaujama.

Santykinė ir absoliuti aptarnavimo geba

$q = 1 - P_4 = 1 - 0{,}47 = 0{,}53$;

$N = \lambda(1 - P_4) = 2 \cdot 0{,}53 = 1{,}06$ skamb. per min.

Tai reiškia, kad vidutiniškai bus aptarnauta 53 proc. visų abonentų, t. y. truputį daugiau negu po vieną skambutį per minutę.

Vidutinis užimtų kanalų skaičius

$$\bar{n} = \alpha(1 - P_4) = 6 \cdot 0{,}53 = 3{,}18 .$$

Nagrinėdami šiuos duomenis sprendžiame, ar mus tenkina tokios telefono stoties darbas. Šios stoties darbą galima pagerinti tik didindami aptarnaujančių kanalų skaičių, nes nei pateikiamų paraiškų skaičius, nei pokalbių trukmė nepriklauso nuo aptarnaujančios sistemos galimybių.

Uždavinys 4.3. Tarkime, kad esant visoms toms pačioms sąlygoms aptarnaujančių kanalų skaičius n = 8. Reikia apskaičiuoti visus anksčiau minėtus rodiklius.

*Sprendimas***.** Atsako tikimybė

$$P_{ats} = P_8 = \frac{\alpha^8}{8!} P_0 .$$

Tikimybė, kad sistemoje nėra nė vienos paraiškos, t. y. visi kanalai laisvi, yra:

$$P_0 = \frac{1}{1+\frac{6}{1!}+\frac{6^2}{2!}+\frac{6^3}{3!}+\frac{6^4}{4!}+\frac{6^5}{5!}+\frac{6^6}{6!}+\frac{6^7}{7!}+\frac{6^8}{8!}} =$$

$$= \frac{1}{1+6+18+36+54+64{,}8+64{,}8+55{,}54+41{,}66} = \frac{1}{341{,}8} = 0{,}00293 .$$

Tokių sudėtingų skaičiavimų atlikti nereikia, nes yra sudarytos funkcijų

$$P_0 = \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!} \right)^{-1} \text{ ir } P_n = \frac{\alpha^n}{n!} \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!} \right)^{-1}$$

specialios lentelės. Be to, visi šioje temoje minimi rodikliai gali būti apskaičiuoti kompiuteriu (žr. 4.12 skyrių).

Atsako tikimybė

$$P_{ats} = P_8 = \frac{\alpha^8}{8!} \cdot P_0 = \frac{41{,}66}{341{,}8} = 0{,}122 \ .$$

Kaip matome, šiuo atveju nebus aptarnauta apie 12 proc. paraiškų. Tai jau gali mus tenkinti. Santykinė ir absoliuti aptarnavimo geba

$q = 1 - P_8 = 1 - 0{,}122 = 0{,}878$; $N = \lambda(1 - P_8) = 2 \cdot 0{,}878 = 1{,}756$.

Vadinasi, vidutiniškai bus aptarnauta apie 88 proc. abonentų, paskambinusių bet kuriuo momentu.

Vidutinis užimtų kanalų skaičius

$\overline{n} = \alpha\,(1 - P_8) = 6 \cdot 0{,}878 = 5{,}27$.

Iš aštuonių kanalų bus vidutiniškai užimta 5,27 kanalo, o tai sudaro beveik 66 proc. visų kanalų. Taigi ši stotis jau gali mus tenkinti.

Siūlome skaitytojui pačiam apskaičiuoti minėtus rodiklius, jei sistemoje yra septyni, šeši, penki, trys ir du kanalai, ir padaryti atitinkamas išvadas.

4.10. Vienkanalė masinio aptarnavimo sistema su eile

Tarkime, yra vienkanalė (n = 1) masinio aptarnavimo sistema, aptarnaujanti λ intensyvumo paraiškų srautą, ir kiekvienos paraiškos aptarnavimo intensyvumas yra μ.

Paraiška, esant visiems kanalams užimtiems, laukia eilėje aptarnavimo pradžios. Tarkime, kad eilė negali būti didesnė kaip m paraiškų. Tai reiškia, kad jei eilėje jau yra m paraiškų, tai kita paraiška jau nebus aptarnaujama.

Šios sistemos rodikliai gali būti apskaičiuojami taip:

Paraiškos atsako tikimybė

$$P_{ats} = P_{m+1} = \frac{\alpha^{m+1}(1-\alpha)}{1-\alpha^{m+2}} \ , \ \alpha \neq 1. \qquad (17)$$

Santykinė sistemos aptarnavimo geba

$$q = 1 - P_{ats} = 1 - P_{m+1} = 1 - \frac{\alpha^{m+1}(1-\alpha)}{1-\alpha^{m+2}}, \quad \alpha \neq 1. \qquad (18)$$

Absoliuti sistemos aptarnavimo geba

$N = \lambda\,(1 - P_{ats})$. (19)

Jeigu $\alpha = 1$, susiduriame su neapibrėžta situacija: šiuo atveju

$$P_{ats} = P_{m+1} = \frac{1}{m+2}, \quad \alpha = 1, \qquad (20)$$

$$q = 1 - P_{ats} = 1 - P_{m+1} = 1 - \frac{1}{m+2}, \quad \alpha = 1. \qquad (21)$$

Vidutinis laukiančių eilės paraiškų skaičius

$$\overline{m} = \frac{\alpha^2\,[1-\alpha^{\mathrm{m}}\,(m+1-ma)]}{(1-\alpha)(1-\alpha^{m+2})}, \quad \alpha \neq 1\,, \qquad -(22)$$

$$\overline{m} = \frac{m}{2}\cdot\frac{m+1}{m+2}, \quad \alpha = 1\,. \qquad (23)$$

Galima apskaičiuoti ir vidutinį laukiančių eilėje, ir aptarnaujamų paraiškų skaičių. Jis apskaičiuojamas pagal formules

$$\overline{k} = \overline{m} + \frac{\alpha - \alpha^{m+2}}{1-\alpha^{m+2}}, \ \alpha \neq 1\,, \qquad (24)$$

$$\overline{k} = \overline{m} + \frac{m+1}{m+2} = \frac{m+1}{2}, \quad \alpha = 1\,. \qquad (25)$$

Svarbu žinoti vidutinį paraiškos laukimo eilėje laiką. Jis apskaičiuojamas taip:

$$\overline{t}_l = \frac{\overline{m}}{\lambda}; \qquad (26)$$

čia $\overline{t}_l$ – vidutinis paraiškos laukimo laikas eilėje.

Vidutinis paraiškos buvimo sistemoje laikas apskaičiuojamas pagal formulę

$$\overline{t}_s = \frac{\overline{m}}{\lambda} + \frac{q}{\mu}; \qquad (27)$$

čia $\overline{t}_s$ – vidutinis paraiškos buvimo sistemoje laikas.

Uždavinys 4.4. Biblioteka yra masinio aptarnavimo sistema. Tarkime, kad studentus aptarnauja viena bibliotekos darbuotoja. Studentai laukia eilėje, jei ją sudaro ne daugiau kaip 5 žmonės. Į biblioteką kas 2 minutės ateina vidutiniškai po vieną studentą. Per 3 minutes darbuotoja aptarnauja vieną studentą.

Apskaičiuokite: tikimybę, kad bet kuris studentas, atvykęs į biblioteką, nebus aptarnautas; santykinę ir absoliučiąją bibliotekos aptarnavimo gebą; vidutinį laukiančių eilėje studentų skaičių; vidutinį aptarnaujamų ir laukiančių eilėje studentų skaičių; vidutinį studentų laukimo eilėje laiką; vidutinį studento buvimo bibliotekoje laiką.

Sprendimas. Apie nagrinėjamą sistemą žinoma:

aptarnaujančių kanalų skaičius $n = 1$;

eilės ilgis $m = 5$ studentai;

studentų atvykimo į biblioteką intensyvumas $\lambda = 0{,}5$ studento per minutę;

kiekvieno studento aptarnavimo laikas $\overline{t_{ap}} = 3$ minutės.

Apskaičiuojame:

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{ap}} = \frac{1}{3}\min^{-1},$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot \bar{t}_{ap} = 0{,}5 \cdot 3 = 1{,}5 .$$

Tikimybė, kad studentas nebus aptarnautas, nes $\alpha \neq 1$, yra:

$$P_{ats} = P_{m+1} = P_6 = \frac{\alpha^6(1-\alpha)}{1-\alpha^7} = \frac{1{,}5^6(1-1{,}5)}{1-1{,}5^7} = \frac{-5{,}695}{-16{,}086} = 0{,}354 .$$

Iš čia išeina, kad nebus aptarnautas kiekvienas trečias studentas.

Santykinė bibliotekos aptarnavimo geba

$$q = 1 - P_{ats} = 1 - 0{,}354 = 0{,}646 .$$

Biblioteka aptarnauja 64,6 proc. studentų.

Absoliuti bibliotekos aptarnavimo geba

$$N = \lambda\ (1 - P_{ats}) = 0{,}5\ (1 - 0{,}354) = 0{,}323.$$

Tai reiškia, kad, pvz., per valandą bibliotekos darbuotoja vidutiniškai aptarnauja $0{,}323 \cdot 60 \approx 19$ studentų.

Vidutinis laukiančių eilėje studentų skaičius

$$\overline{m} = \frac{a^2\,[1 - a^m\,(m+1-ma)]}{(1-\alpha)\,(1-\alpha^{m+2})} = \frac{1.5^2\,[1-1{,}5^5\,(5+1-5\cdot 1{,}5)]}{(1-1{,}5)\,(1-1{,}7^7)}$$

$$= \frac{2{,}25\cdot 12{,}39}{0{,}5\cdot 16{,}086} = 3{,}47\ .$$

Vadinasi, vidutiniškai eilėje laukia 3,5 studento (3–4 studentai).

Vidutinis aptarnaujamų ir eilėje laukiančių studentų skaičius

$$\overline{k} = \overline{m} + \frac{\alpha - \alpha^{m+2}}{1-\alpha^{m+2}} = 3{,}47 + \frac{1{,}5 - 1{,}5^7}{1-1{,}5^7} = 3{,}47 + \frac{1{,}5 - 17{,}086}{1-17{,}086} = 4{,}44.$$

Vadinasi, aptarnaujamų ir eilėje laukiančių studentų skaičius vidutiniškai lygus 4,44.

Vidutinis studento laukimo eilėje laikas

$$\overline{t}_l = \frac{\overline{m}}{\lambda} = \frac{3{,}47}{0{,}5} = 6{,}94\ \text{min.}$$

Taigi eilėje studentas vidutiniškai laukia 7 minutes, o vidutinis jo buvimo bibliotekoje laikas

$$\overline{t}_s = \frac{\overline{m}}{\lambda} + \frac{q}{\mu} = \frac{3{,}47}{0{,}5} + \frac{0{,}646}{0{,}333} = 8{,}88\ \text{min.}$$

Vadinasi, studentas bibliotekoje būna vidutiniškai 9 minutes.

Šie rodikliai gana išsamiai apibūdina bibliotekos darbą. Jie leidžia spręsti, ar reikia priimti naujų darbuotojų, ar reikia reguliuoti studentų srautą į biblioteką, kiek laiko studentas turi numatyti darbui bibliotekoje ir t. t.

Paraiška gali laukti aptarnavimo pradžios ir neribotą laiką. Tokia padėtis susidaro, jei reikiamas paslaugas teikia tik vienas aptarnavimo punktas, o paslauga negali būti atidėta. Tuomet eilės gali laukti neribotas paraiškų skaičius, t. y. $m \to \infty$. Tokios sistemos rodiklius galima apskaičiuoti tik jeigu $\alpha < 1$. Jei $\alpha \geq 1$, MAS neturi stacionaraus režimo ir eilė didėja iki begalybės.

Jei $\alpha < 1$, tai visos paraiškos anksčiau arba vėliau bus aptarnautos. Tuomet atsako tikimybė $P_{ats} = 0$, santykinė aptarnavimo geba $q = 1$, absoliuti aptarnavimo geba $N = \lambda$, vidutinis paraiškų skaičius eilėje

$$\overline{m} = \frac{\alpha^2}{1-\alpha}, \qquad (28)$$

vidutinis laukiančių eilės ir aptarnaujamų paraiškų skaičius

$$\overline{k} = \frac{\alpha}{1-\alpha}, \qquad (28)$$

vidutinis paraiškos laukimo eilėje laikas

$$\overline{t}_l = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{\alpha^2}{\lambda(1-\lambda)}, \qquad (30)$$

o vidutinis paraiškos buvimo sistemoje laikas

$$\overline{t}_s = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1-\alpha}. \qquad (31)$$

4.11. Daugiakanalė masinio aptarnavimo sistema su eile

Tarkime, masinio aptarnavimo sistema turi n aptarnaujančių kanalų.

Ši sistema aptarnauja paraiškų srautą, kurio intensyvumas λ, o vienas kanalas aptarnauja μ paraiškų per minutę (paraiškų aptarnavimo intensyvumas yra μ).

Eilėje gali laukti ne daugiau kaip m paraiškų.

Šios sistemos rodikliai gali būti apskaičiuoti taip.

Tikimybė, kad visi aptarnavimo kanalai yra laisvi:

$$P_0^{-1} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{1}{n!} \sum_{j=n+1}^{n+m} \frac{\alpha^j}{n^{j-n}}, \qquad \frac{\alpha}{n} \neq 1 \qquad (32)$$

arba

$$P_0^{-1} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^n}{n!} \cdot \frac{\alpha/n - (\alpha/n)^{m+1}}{1-\alpha/n}, \quad \frac{\alpha}{n} \neq 1,$$

$$P_0^{-1} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^{\mathrm{i}}}{i!} + \frac{\alpha^n.m}{n!}, \quad \frac{\alpha}{n} = 1. \qquad (33)$$

Tikimybė, kad užimta i kanalų:

$$P_i = \frac{\alpha^i}{i!} P_0, \; i = 1, 2, ..., n.$$

Tikimybė, kad užimta n aptarnaujančių kanalų ir j paraiškų laukia eilės:

$$P_{n+j} = \frac{\alpha^{n+j}}{n^j \cdot n!} \cdot P_0, \; j = 1, 2, ..., m.$$

Dabar galima apskaičiuoti pagrindinius šios MAS rodiklius.

Atvykusi paraiška nebus aptarnauta, jei visi n kanalai yra užimti ir eilėje jau laukia m paraiškų, t. y.

$$P_{ats} = P_{n+m} = \frac{\alpha^{n+m}}{n^m \cdot n!} P_0 . \tag{34}$$

Santykinė šios sistemos aptarnavimo geba

$$q = 1 - P_{ats} = 1 - \frac{\alpha^{n+m}}{n^m \cdot n!} P_0 . \tag{35}$$

Absoliuti sistemos aptarnavimo geba

$$N = \lambda \cdot q = \lambda \left(1 - \frac{\alpha^{n+m}}{n^m \cdot n!} P_0 \right) . \tag{36}$$

Vidutinis užimtų kanalų skaičius yra lygus absoliučiai sistemos aptarnavimo gebai, padalytai iš paraiškų aptarnavimo intensyvumo:

$$\bar{n} = \frac{N}{\mu} = \alpha \left(1 - \frac{\alpha^{n+m}}{n^m \cdot n!} P_0 \right) ; \tag{37}$$

čia $\bar{n}$ – vidutinis užimtų aptarnaujančių kanalų skaičius. Dalis užimtų kanalų $\delta = \frac{\bar{n}}{n}$.

Vidutinis laukiančių aptarnavimo paraiškų skaičius

$$\bar{m} = \frac{\alpha^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot \frac{P_0 \cdot [1 - (m + 1 - m \cdot \gamma)\gamma^m]}{(1 - \gamma)^2}, \quad \gamma \neq 1 , \tag{38}$$

$$\overline{m} = \frac{\alpha^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot P_0 \frac{m}{2}(m+1), \quad \gamma = 1; \tag{39}$$

čia $\gamma = \dfrac{\alpha}{\text{n}}$.

Vidutinis sistemoje esančių (aptarnaujamų ir laukiančių eilėje) paraiškų skaičius

$$\overline{k} = \overline{n} + \overline{m}. \tag{40}$$

Vidutinis vienos paraiškos laukimo eilėje laikas

$$\overline{t}_l = \frac{\alpha^n \cdot P_0}{n \cdot \mu \cdot n!} \cdot \frac{1 - \gamma^m [1 + m(1-\gamma)]}{(1-\gamma)^2}, \quad \gamma \neq 1, \tag{41}$$

$$\overline{t}_l = \frac{\alpha^n}{n \cdot \mu \cdot n!} \cdot P_0 \frac{m}{2}(m+1), \quad \gamma = 1. \tag{42}$$

Vidutinis vienos paraiškos buvimo sistemoje laikas

$$\overline{t}_s = \overline{t}_l + \frac{q}{\mu}. \tag{43}$$

Taigi apskaičiuoti visi pagrindiniai MAS rodikliai. Naudodamiesi šiomis formulėmis, išspręsime kitą uždavinį.

Uždavinys 4.5. Išspręskite uždavinį 4.4, jei studentus aptarnauja dvi bibliotekos darbuotojos.

*Sprendimas***.** Žinoma:

aptarnaujančių kanalų skaičius $n = 2$;

eilės ilgis $m = 5$ studentai;

į biblioteką kas dvi minutes atvyksta po vieną studentą ($\lambda = 0{,}5$);

kiekvieno studento aptarnavimo laikas $\overline{t}_{ap} = 3$ min.

Jau apskaičiuota, kad $\mu = \dfrac{1}{3}$, $\alpha = 1{,}5$.

Tikimybę, kad abi bibliotekos darbuotojos yra laisvos, apskaičiuojame pagal (30) formulę

$$P_0^{-1} = \sum_{i=0}^{2} \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{1}{2!} \sum_{j=2+1}^{2+5} \frac{\alpha^j}{2^{j-2}} = 1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^3}{2} + \frac{\alpha^4}{2^2} + \frac{\alpha^5}{2^3} + \frac{\alpha^6}{2^4} + \frac{\alpha^7}{2^5} \right) = 6{,}2, \ P_0 = 0{,}1613,$$

arba

$$P_0^{-1} = 1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^2}{2!} \cdot \frac{\frac{\alpha}{2} - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{5+1}}{1 - \frac{\alpha}{2}} = 6{,}2\,, \ P_0 = 0{,}1613 \ .$$

Jei biblioteka dirba 8 val. per dieną, tai vidutiniškai abi darbuotojos laisvos 8·0,1613 = 1,29 val., t. y. 1 val. 17 min.

Tikimybė, kad studentas nebus aptarnautas:

$$P_{ats} = P_{n+m} = P_7 = \frac{\alpha^{n+m}}{n^m \cdot n!} P_0 = \frac{1{,}5^{2+5}}{2^5 \cdot 2!} \cdot 0{,}1613 = 0{,}043 \ .$$

Iš čia išplaukia, kad nebus aptarnautas vidutiniškai kas 23 studentas (1/0,043 = 23,22).

O esant vienai darbuotojai ši tikimybė buvo 0,354, t. y. buvo didesnė daugiau negu 8 kartus. Santykinė bibliotekos aptarnavimo geba

$$q = 1 - P_{ats} = 1 - 0{,}043 = 0{,}957\,,$$

t. y. biblioteka aptarnauja beveik 96 proc. atvykusių studentų.

Absoliuti bibliotekos aptarnavimo geba

$N = \lambda \cdot q = 0{,}5 \cdot 0{,}957 = 0{,}48$ studento per minutę.

Tai reiškia, kad per valandą bus aptarnauti 29 studentai, o viena darbuotoja aptarnaudavo 19 studentų.

Taigi studentų nebus aptarnauta du kartus daugiau. Taip yra todėl, kad sistemoje vyksta atsitiktinis procesas.

Vidutinis laukiančių eilėje studentų skaičius

$$\overline{m} = \frac{\alpha^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot \frac{P_0}{(1-\gamma)^2}[1 - \gamma^m (m + 1 - m\gamma)]\,, \text{ nes } \gamma = 0{,}75\,, \text{ t. y. } \gamma \neq 1\,,$$

$$\overline{m} = \frac{1{,}5^{2+1}}{2 \cdot 2!} \cdot \frac{0{,}1613}{(1-0{,}75)^2}[1-0{,}75^5(5+1-5\cdot 0{,}75] = 1\,,$$

o dirbant tik vienai darbuotojai eilėje laukdavo vidutiniškai 3,47 studento, t. y. 3,5 karto daugiau.

Vidutinis užimtų bibliotekos darbuotojų skaičius

$$\overline{n} = \frac{N}{\mu} = \frac{0{,}48}{0{,}333} = 1{,}44 \ .$$

Vidutinis esančių bibliotekoje studentų skaičius

$$\overline{k} = \overline{n} + \overline{m} = 1{,}44 + 1 = 2{,}44 \ .$$

Vidutinis vieno studento laukimo eilėje laikas

$$\overline{t}_l = \frac{\alpha^n \cdot P_0}{n \cdot \mu \cdot n!} \cdot \frac{1-\gamma^m[1+m(1-\gamma)]}{(1-\gamma)^2},$$

$$\overline{t}_l = \frac{1{,}5^2 \cdot 0{,}1613}{2 \cdot 0{,}333 \cdot 2!} \cdot \frac{1-0{,}75^5[1+5(1-0{,}75)]}{(1-0{,}75)^2} = 2{,}03 \ \text{ min.}$$

Kai dirba tik viena bibliotekos darbuotoja, eilėje vidutiniškai reikia laukti 6,94 min., t. y. 3,4 karto ilgiau.

Vidutinis studento buvimo bibliotekoje laikas

$$\overline{t}_s = \overline{t}_l + \frac{q}{\mu} = 2{,}03 + \frac{0{,}957}{0{,}333} = 4{,}9 \ \text{ min.}$$

Dirbant tik vienai darbuotojai, studentas bibliotekoje vidutiniškai išbūdavo 8,88 min. Taigi, lygindami gautus rodiklius ir keisdami sistemos parametrus, galime pasiekti, kad ši sistema atitiktų jai keliamus reikalavimus.

Kai eilės dydis nėra reglamentuojamas ($m \to \infty$), uždavinys išsprendžiamas, jei parametras

$$\gamma = \frac{\alpha}{n} < 1 \ . \tag{45}$$

Priešingu atveju eilė didėja iki begalybės.

Tarkime, (45) sąlyga įvykdyta. Tuomet tikimybė, kad visi kanalai laisvi, yra:

$$P_0^{-1} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)} \ . \tag{46}$$

Tikimybė, kad užimta i kanalų, yra:

$$P_i = \frac{\alpha^i}{i!} P_0 \ , \ i = 1, 2, ..., n \ . \tag{47}$$

Tikimybė, kad užimta n aptarnaujančių kanalų ir j paraiškų laukia eilėje, yra:

$$P_{n+j} = \frac{\alpha^{n+j}}{n^j \cdot n!} P_0 \ , \ j = 1, 2, ... \ . \tag{48}$$

Šiomis sąlygomis bet kuri paraiška bus aptarnauta, todėl

$$P_{ats} = 0 \ , \ q = 1. \tag{49}$$

Absoliuti sistemos aptarnavimo geba

$$N = \lambda \cdot q = \lambda \ . \tag{50}$$

Vidutinis užimtų kanalų skaičius

$$\overline{n} = \frac{N}{\mu} = \alpha \ . \tag{51}$$

Vidutinis laukiančių eilėje paraiškų skaičius

$$\overline{m} = \frac{\alpha^{n+1} P_0}{n \cdot n!(1-\gamma)^2} \ . \tag{52}$$

Vidutinis sistemoje esančių (aptarnaujamų ir laukiančių eilėje) paraiškų skaičius

$$\overline{k} = \overline{n} + \overline{m} \ . \tag{53}$$

Vidutinis vienos paraiškos laukimo eilėje laikas

$$\overline{t}_l = \frac{\alpha^n P_0}{n \cdot \mu \cdot n!(1-\gamma)^2} \ . \tag{54}$$

Vidutinis vienos paraiškos buvimo sistemoje laikas

$$\overline{t}_s = \overline{t}_l + \frac{1}{\mu} . \tag{55}$$

Pagal (45)–(55) formules galime apskaičiuoti visus mus dominančius rodiklius, prieš tai patikrinę, ar $\gamma < 1$.

Uždavinys 4.6. Išspręskite 4.5 uždavinį, jei eilės ilgis neribotas.

*Sprendimas***.** Apskaičiuojame, kokia yra tikimybė, kad abi bibliotekos darbuotojos bus laisvos:

$$P_0^{-1} = \sum_{i=0}^{2} \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^{2+1}}{2!(2-\alpha)} = 1 + \frac{1{,}5}{1!} + \frac{1{,}5^2}{2!} + \frac{1{,}5^3}{2!(2-1{,}5)} = 7 \ ,$$

$$P_0 = \frac{1}{7} = 0{,}143 \ ,$$

$P_{ats} = 0$, $q = 1$, $N = \lambda = 0{,}5$ studento per minutę.

Vidutinis užimtų bibliotekos darbuotojų skaičius

$$\bar{n} = \alpha = 1{,}5 \ .$$

Vidutinis eilėje laukiančių studentų skaičius

$$\bar{m} = \frac{\alpha^{2+1} P_0}{2 \cdot 2!(1-\gamma)^2} = \frac{1{,}5^3 \cdot 0{,}143}{4 \cdot 0{,}25^2} = 1{,}93 \ .$$

Vidutinis bibliotekoje esančių studentų skaičius

$$\bar{k} = \bar{n} + \bar{m} = 1{,}5 + 1{,}93 = 3{,}43 \ .$$

Vidutinis vieno studento laukimo eilėje laikas

$$\bar{t}_l = \frac{\alpha^n P_0}{n \cdot \mu \cdot n!(1 - \gamma)^2} = \frac{1{,}5^2 \cdot 0{,}143}{2 \cdot 0{,}333 \cdot 2!(1-0{,}75)^2} = 3{,}86 \text{ min.}$$

Vidutinis vieno studento buvimo bibliotekoje laikas

$$\bar{t}_s = \bar{t}_l + \frac{1}{\mu} = 3{,}86 + \frac{1}{0{,}333} = 6{,}86 \text{ min.}$$

Šiame skirsnyje išnagrinėtos tik kelios masinio aptarnavimo sistemų rūšys. Jų yra labai daug.

4.12. Masinio aptarnavimo sistemos rodiklių apskaičiavimas kompiuteriu Excel aplinkoje

Masinio aptarnavimo sistemos rodiklius patogu apskaičiuoti pasitelkus kompiuterius.

4.12.1. Vienkanalė MAS be eilės

Tokios sistemos rodikliai apskaičiuojami pasitelkus formules (5)–(7).

Formulės labai paprastos, todėl jos rodiklius galima apskaičiuoti nesinaudojant kompiuteriu, tačiau jei daug kartų keičiami išeities duomenys, patogu turėti specialią programą.

Įjungiame Excel programą ir pasirenkame duomenų išdėstymo tvarką.

Veiksmų algoritmas gali būti toks.

1. Langelyje A1 užrašome paraiškų srauto intensyvumo reikšmę λ, langelyje A2 – paraiškų aptarnavimo intensyvumo reikšmę μ. Būtina, kad šių reikšmių mato vienetai būtų vienodi.

2. Atsako tikimybė P_{ats}, t. y. tikimybė, kad klientas nebus aptarnaujamas, apskaičiuojama surinkus langelyje C2 formulę (7) = a1/(a1+a2).

3. Santykinė aptarnavimo geba q randama langelyje C3, surinkus joje formulę =1- C2.

4. Absoliuti aptarnavimo geba N (6 formulė) randama langelyje C4 surinkus formulę = a1*c3.

4.12.2. Daugiakanalė MAS be eilės

Tokios sistemos rodikliai apskaičiuojami pasitelkus formules (12)–(16).

Tikimybė, kad visi šios sistemos aptarnavimo kanalai yra laisvi, randama pagal (12) formulę.

Atliekant apskaičiavimus Excel aplinkoje, patogu pasinaudoti tokia tapatybe

$$\frac{\alpha^k}{k!} = \frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!}\frac{\alpha}{k}.$$

Įjungiame Excel programą ir pasirenkame duomenų išdėstymo tvarką. Veiksmų algoritmas gali būti toks:

1. Langelyje A1 užrašome paraiškų srauto intensyvumo reikšmę λ, langelyje A2 – paraiškų aptarnavimo intensyvumo reikšmę μ. Būtina, kad šių reikšmių mato vienetai būtų identiški.

Langelyje A3 užrašome koeficientą $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$, surinkę joje formulę = a1/a2.

Langelyje A4 užrašome bendrą aptarnaujančių kanalų skaičių n.

2. Langelyje B1 užrašome 1.

Langelyje B2 surenkame formulę =b1*a3.

Langelyje B3 surenkame formulę =b2*a3/2.

Langelyje B4 surenkame formulę =b3*a3/3.

Langelyje B5 surenkame formulę =b4*a3/4 ir t. t.

Bendru atveju paskutiniame B(Nr.(n+1)) langelyje surenkame formulę = b(Nr.n)*a3/n.

Paskutinio langelio numeris turi būti vienetu didesnis, nei turime aptarnaujančių kanalų, nes vieną langelį užėmėme užrašydami jame vienetą (žr. langelį B1).

3. Langelyje C1 surenkame formulę =1/sum(b1:bNr.(n+1)). Ten pamatysime tikimybės P_0, kad visi aptarnavimo kanalai yra laisvi, reikšmę.

4. Atsako tikimybė P_{ats}, t. y. tikimybė, kad klientas nebus aptarnaujamas, apskaičiuojama surinkus langelyje C2 formulę (13) =a3^a4*c1/insert/function/FACT(n).

5. Santykinė aptarnavimo geba q randama langelyje C3, surinkus joje formulę =1- C2.

6. Absoliuti aptarnavimo geba N (15 formulė) randama langelyje C4, surinkus joje formulę =a1*c3.

7. Vidutinis užimtų aptarnaujančių kanalų skaičius $\overline{n}$ (formulė 16) apskaičiuojamas surinkus langelyje C5 formulę =c4/a2.

Parodysime, kaip tai daroma, pasitelkę konkrečius uždavinius.

1 uždavinys

Tarkime, nagrinėjamas telefono stoties, turinčios 4 aptarnavimo kanalus, darbas. Klientas, paskambinęs, kai visi kanalai yra užimti, neaptarnaujamas (jis girdi trumpus signalus). Sakykime, vidutiniškai klientai skambina 2 kartus per minutę. Vienas pokalbis vidutiniškai trunka 3 minutes.

Reikia įvertinti šios telefono stoties darbo efektyvumą.

Sprendimas. Nustatome pradinius duomenis:

$$\lambda = 2\ skamb.\ \text{per min.},\ \mu = \frac{1}{3} skamb.\ \text{per min.},\ \alpha = 6,\ n = 4.$$

Surinkę reikiamas formules sužinome, kad tikimybė, jog visi 4 aptarnavimo kanalai bus laisvi, yra P_0 = 0,008696 (C1 langelio reikšmė).

Atsako tikimybė, t. y. tikimybė, kad klientas išgirs trumpus signalus, lygi P_{ats} = 0,469565 (langelis C2).

Santykinė stoties aptarnavimo geba arba tikimybė, kad klientas bus sujungtas su abonentu iš pirmo karto, randama iš vieneto atėmus atsako tikimybę (langelis C3, q = 0,530435).

Absoliuti aptarnavimo geba N = 1,06087 skamb. per min.

Vidutinis užimtų aptarnaujančių kanalų skaičius $\overline{n}$ = 3,182609.

2 uždavinys

Tarkime, kad esant visoms toms pačioms sąlygoms aptarnaujančių kanalų skaičius yra 8. Reikia apskaičiuoti visus telefono stoties veiklos efektyvumo rodiklius.

*Sprendimas***.**

Suvedame naujus duomenis:

$$\lambda = 2\ skamb.\ \text{per min.},\ \mu = \frac{1}{3} skamb.\ \text{per min.},\ \alpha = 6,\ n = 8.$$

1. Langelyje A1 užrašome paraiškų srauto intensyvumo reikšmę λ, langelyje A2 – paraiškų aptarnavimo intensyvumo reikšmę μ.

Langelyje A3 užrašome koeficientą $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$, surinkę joje formulę = a1/a2.

Langelyje A4 užrašome bendrą aptarnaujančių kanalų skaičių n = 8.

2. Langelyje B1 užrašome 1.

Langelyje B2 surenkame formulę =b1*a3.

Langelyje B3 surenkame formulę =b2*a3/2.

Langelyje B4 surenkame formulę =b3*a3/3.

Langelyje B5 surenkame formulę =b4*a3/4.

Langelyje B6 surenkame formulę =b5*a3/5.

Langelyje B7 surenkame formulę =b6*a3/6.

Langelyje B8 surenkame formulę =b7*a3/7.

Langelyje B9 surenkame formulę =b8*a3/8.

3. Langelyje C1 surenkame formulę =1/sum(b1:b9). Ten pamatysime tikimybės P_0 = 0,002926, kad visi aptarnavimo kanalai yra laisvi, reikšmę.

4. Atsako tikimybė, P_{ats} =0,121876, t. y. tikimybė, kad klientas nebus aptarnaujamas, apskaičiuojama surinkus langelyje C2 formulę =a3^a4*c1/insertfunctionFACT(a4)ok.

5. Santykinė aptarnavimo geba randama langelyje C3 (q = 0,878124) surinkus formulę =1- C2.

6. Absoliuti aptarnavimo geba randama langelyje C4 surinkus formulę =a1*c3 (N = 1,756248).

7. Vidutinis užimtų aptarnaujančių kanalų skaičius $\overline{n}$ (formulė 16) apskaičiuojamas surinkus langelyje C5 formulę =c4/a2 ($\overline{n}$ = 5,268745).

4.12.3. Vienkanalė MAS su eile

Šios sistemos rodikliai gali būti apskaičiuoti pagal formules (17)–(27).

Įjungiame Excel programą ir pasirenkame duomenų išdėstymo tvarką.

Veiksmų algoritmas gali būti toks: langelyje A1 užrašome paraiškų srauto intensyvumo reikšmę λ, langelyje A2 – paraiškų aptarnavimo intensyvumo reikšmę μ.

Būtina, kad šių reikšmių mato vienetai būtų identiški.

Langelyje A3 užrašome koeficientą $\alpha = \dfrac{\lambda}{\mu}$, surinkę formulę = a1/a2.

Langelyje A4 užrašome bendrą aptarnaujančių kanalų skaičių n.

Langelyje A5 užrašome paraiškų skaičių eilėje m.

Pirmas atvejis – langelyje A3 atsiranda vienetas. Sistemos rodikliai apskaičiuojami pagal formules 19, 20, 21, 23, 25, 26, 27.

Antras atvejis – langelio A3 reikšmė nėra vienetas. Naudojamasi formulėmis 17, 18, 19, 22, 24, 26, 27.

Nagrinėjame pirmąjį atvejį.

Langeliuose A1:A5 surenkame išeities duomenis – konkrečius skaičius, o langelyje A3 – formulę =a1/a2.

Sistemos efektyvumo rodiklius surašome stulpelio B langeliuose.

Atsako tikimybė randama surinkus langelyje B1 formulę =1/(A5+2).

Santykinė aptarnavimo geba randama surinkus langelyje B2 formulę =1-B1.

Absoliuti aptarnavimo geba randama surinkus langelyje B3 formulę =a1*b2 .

Vidutinis laukiantis eilės paraiškų skaičius randamas surinkus langelyje B4 formulę =a5/2*((a5+1)/(a3+2)).

Vidutinis paraiškos laukimo eilėje laikas randamas surinkus langelyje B5 formulę =b4/a1.

Vidutinis paraiškos buvimo sistemoje laikas randamas surinkus langelyje B6 formulę =b4/a1+b2/a2.

Vidutinis užimtų aptarnaujančių kanalų skaičius randamas surinkus langelyje B7 formulę =b3/a2.

Nagrinėjame antrąjį atvejį, kai $\alpha \neq 1$.

Sistemos efektyvumo rodiklius surašome stulpelio B langeliuose.

Atsako tikimybė (formulė 17) randama surinkus langelyje B1 formulę =a3^(a5+1)*(1-a3)/(1-a3^(a5+2)).

Santykinė aptarnavimo geba randama surinkus langelyje B2 formulę =1-B1.

Absoliuti aptarnavimo geba randama surinkus langelyje B3 formulę =a1*b2 .

Vidutinis laukiantis eilės klientų skaičius randamas surinkus langelyje B4 formulę =A3^2*((1-A3^A5*(A5+1-A5*A3)))/((1-A3)*((1-A3^(A5+2)))).

(Dėmesio, atidaromųjų ir uždaromųjų skliaustelių skaičius turi būti vienodas!).

Vidutinis kliento laukimo eilėje laikas (formulė 26) randamas surinkus langelyje B5 formulę =b4/a1.

Vidutinis kliento buvimo sistemoje laikas (formulė 27) randamas surinkus langelyje B6 formulę =B5+B2/A2.

Vidutinis užimtų aptarnaujančių kanalų skaičius randamas surinkus langelyje B7 formulę =b3/a2.

4.12.4. Daugiakanalė MAS su eile

1. Langelyje A1 užrašome paraiškų srauto intensyvumo reikšmę λ, langelyje A2 – paraiškų aptarnavimo intensyvumo reikšmę μ. Būtina, kad šių reikšmių mato vienetai būtų identiški.

Langelyje A3 užrašome koeficientą $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$, surinkę joje formulę =a1/a2.

Langelyje A4 užrašome bendrą aptarnaujančių kanalų skaičių *n*.

Langelyje A5 užrašome paraiškų skaičių eilėje *m*.

Langelyje A6 užrašome koeficientą $\gamma = \frac{\alpha}{n}$, surinkę joje formulę =a3/a4.

Galimi du atvejai: 1) $\gamma = 1$; 2) $\gamma \neq 1$.

3 uždavinys

Notarų kontoroje dirba 2 notarai. Į kontorą atvyksta vidutiniškai 8 klientai per valandą. Vienas klientas aptarnaujamas vidutiniškai per 15 min. Klientai laukia eilėje, jei joje yra ne daugiau kaip 2 klientai. Reikia apskaičiuoti kontoros darbo efektyvumo rodiklius.

Sprendimas. Žinomi tokie duomenys:

$n = 2$, $\lambda = 8$ *klien.* per val., $\bar{t}_{ap} = 15\,\text{min}.$, $m = 2$.

Apskaičiuojame koeficientą $\gamma = \dfrac{\alpha}{n} = \lambda \bar{t}_{ap} / n = 8 * 0{,}25 / 2 = 1$.

Tai pirmasis atvejis, nes 1) $\gamma = 1$.

Taikome formules (33)–(37), (39), (40), (42), (43).

Surenkame pradinius duomenis.

2. Tikimybė, kad visi aptarnavimo kanalai yra laisvi, apskaičiuojama pagal formulę

$$P_0^{-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{m\alpha^n}{n!}.$$

Ši tikimybė apskaičiuojama taip.

Langelyje B1 užrašome 1.

Langelyje B2 surenkame formulę =a3.

Langelyje B3 surenkame formulę =b2*a3/2.

Bendru atveju paskutiniame B(Nr.(n+1)) langelyje surenkame formulę = b(Nr.n)*a3/n.

Tai visos reikšmės, esančios po sumos ženklu.

Langelyje C1 surenkame =a5*a3^a4/2. Tai laisvojo nario reikšmė.

Langelyje C2 surenkame formulę =(c1+sum(b1:b3))^-1. Tai tikimybė, kad abu aptarnavimo kanalai šiame uždavinyje yra laisvi, yra 0,1111.

Bendru atveju langelyje C2 surenkame formulę =(c1+sum(b1:bNr.(n+1)))^-1.

3. Atsako tikimybė apskaičiuojama pagal formulę

$$P_{ats} = \frac{\alpha^{n+m}}{n^m n!} P_0.$$

Langelyje C3 surenkame formulę =A3^(A4+A5)*C2/(A4^A5*FACT(A4)). Šiuo atveju tikimybė, kad klientas išeis iš kontoros neaptarnautas, yra 0,2222.

4. Santykinė šios sistemos aptarnavimo geba randama surinkus langelyje C4 formulę =1-c3. Bus aptarnauta beveik 78 proc. klientų.

5. Absoliuti sistemos aptarnavimo geba randama surinkus langelyje C5 formulę =a1*c4. Bus aptarnauta 6,2 kliento per valandą.

6. Vidutinis užimtų notarų skaičius sužinomas surinkus langelyje C6 formulę =c5/a2 (1,56).

7. Vidutinė užimtų kanalų dalis randama surinkus langelyje C7 formulę =c6/a4.

8. Vidutinis laukiančių aptarnavimo klientų skaičius apskaičiuojamas pagal formulę

$$\overline{m} = \frac{\alpha^{n+1} P_0 m(m+1)}{2nn!}.$$

Šis rodiklis gaunamas surinkus langelyje C8 formulę
=a3^(a4+1)*c2*a5*(a5+1)/(2*a4*.Fact(a4)).

9. Vidutinis kliento laukimo eilėje laikas apskaičiuojamas langelyje C9 pagal formulę =c8/a1 (0,083 val.).

10.Vidutinis kliento buvimo kontoroje laikas apskaičiuojamas surinkus langelyje c10 formulę =c9+c4/a2 (0,28 val.).

Tuo atveju, kai $\gamma \neq 1$, kai kurios formulės yra skirtingos, todėl verta viską nuosekliai pakartoti, vėl pasitelkus konkretų uždavinį.

4 uždavinys

Notarų kontoroje dirba 3 notarai. Į kontorą atvyksta vidutiniškai 8 klientai per valandą. Vienas klientas aptarnaujamas vidutiniškai per 15 min. Klientai laukia eilėje, jei joje yra ne daugiau kaip 3 klientai. Reikia apskaičiuoti kontoros darbo efektyvumo rodiklius.

Sprendimas. Žinomi tokie duomenys:
$n = 3,\ \lambda = 8\ klien.$ per val., $\bar{t}_{ap} = 15\,\text{min},\ m = 3$.

Apskaičiuojame koeficientą $\gamma = \dfrac{\alpha}{n} = \lambda \bar{t}_{ap} / n = 8 * 0{,}25/3 = \dfrac{2}{3}$.

Tai antrasis atvejis, nes $\gamma \neq 1$.

Surenkame pradinius duomenis.

1. Tikimybė, kad visi aptarnavimo kanalai yra laisvi, apskaičiuojama pagal formulę

$$P_0^{-1} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^n(\gamma - \gamma^{m+1})}{(1-\gamma)n!}.$$

Ši tikimybė apskaičiuojama taip.

Langelyje B1 užrašome 1.

Langelyje B2 surenkame formulę =a3.

Langelyje B3 surenkame formulę =b2*a3/2.

Langelyje B4 surenkame formulę =b3*a3/3.

Bendru atveju paskutiniame B(Nr.(n+1)) langelyje surenkame formulę = b(Nr.n)*a3/n.

Tai visos reikšmės, esančios po sumos ženklu.

Langelyje C1 surenkame =a3^a4*(a6-a6^(a5+1))/((1-a6)*FACT(a4)). Tai laisvojo nario reikšmė (1,877).

Langelyje C2 surenkame formulę =(c1+sum(b1:b4))^-1. Tai tikimybė, kad abu aptarnavimo kanalai šiame uždavinyje yra laisvi (0,122).

Bendru atveju langelyje C2 surenkame formulę =(c1+sum(b1:bNr.(n+1)))^-1.

2. Atsako tikimybė apskaičiuojama surinkus langelyje C3 formulę =A3^(A4+A5)*C2/(A4^A5*FACT(A4)).

Šiuo atveju tikimybė, kad klientas išeis iš kontoros neaptarnautas, yra 0,0481.

3. Santykinė šios sistemos aptarnavimo geba randama surinkus langelyje C4 formulę =1-c3. Bus aptarnauta beveik 95 proc. klientų.

4. Absoliuti sistemos aptarnavimo geba randama surinkus langelyje C5 formulę =a1*c4. Bus aptarnauta 7,62 kliento per valandą.

5. Vidutinis užimtų notarų skaičius randama surinkus langelyje C6 formulę =c5/a2 (1,9).

6. Vidutinė užimtų kanalų dalis randama surinkus langelyje C7 formulę =c6/a4.

1. Vidutinis laukiančių aptarnavimo klientų skaičius apskaičiuojamas pagal formulę

2.

$$\overline{m} = \frac{\alpha^{n+1} P_0 [1-(m+1-m\gamma)\gamma^m]}{nn!(1-\gamma)^2}.$$

Šis rodiklis gaunamas surinkus langelyje C8 formulę =a3^(a4+1)*c2*((1-(a5+1-a5*a6)*a6^a4))/(a4*(1-a6)^2*FACT(a4)) (0,397).

3. Vidutinis kliento laukimo eilėje laikas apskaičiuojamas langelyje C9 pagal formulę =c8/a1 (0,05 val.).

4. Vidutinis kliento buvimo kontoroje laikas apskaičiuojamas surinkus langelyje C10 formulę =c9+c4/a2 (0,287 val.).

Visi atvejai patogumo dėlei suvesti į vieną lentelę – MAS Excel sprendimų programos.

1 lentelė. **Daugiakanalė MAS su eile.** $\gamma = 1$

MAS tipas	Pradiniai duomenys stulpelyje A (pavyzdys)	Tarpiniai skaičiavimai B stulpelis (pavyzdys)	Rodikliai C stulpelis (pavyzdys)	Formulės (rodiklių reikšmės)
Daugia kanalė MAS su eile $\gamma = 1$	λ (8) a1	b1 = 1 (1)	c1 =a5*a3^a4/FACT(a4)	4
	μ (4) a2	b2 =a3 (2)	c2 =(c1+sum(b1:b3))^-1	$P_0 = 0{,}111$
	α (2) a3	b3 =b2*a3/ 2 (2)	c3=A3^(A4+A5)*C2/(A4^A 5*FACT(A4))	$P_{ats} = 0{,}222$
	n (2) a4	...	c4 =1-c3	$q =$ 0,778
	m (2) a5	...	c5 =a1*c4	$N = 6{,}2$
	γ(1) a6	b(n+1) =b(n)*a3 /(n-1)	c6 =c5/a2	$\overline{n} = 1{,}56$
			c7 =c6/a4.	$\delta = 0{,}778$
			c8=a3^(a4+1)*c2*a5*(a5+1)/(2*a4* Fact(a4)).	$\overline{m} = 0{,}667$
			c9 =c8/a1	$\bar{t}_l = 0{,}083$ val.
			c10 =c9+c4/a2	$\bar{t}_s = 0{,}28$ val.

Pastabos: 1. Paskutinis B stulpelio langelis yra su numeriu (n+1). Vadinasi, reikia surinkti tiek eilučių, kad jų būtų viena daugiau, nei yra aptarnaujančių kanalų.

2. Langelyje C2 formulėje po ženklu sum skliausteliuose turi būti (b1:b(n+1).

3. Suvedus pradinius duomenis, reikia patikslinti formulę langelyje C2 ir įsitikinti, kad eilučių B stulpelyje yra viena daugiau, nei yra aptarnaujančių kanalų.

4. Lentelėje pateiktas kontrolinis variantas: surinkus skliausteliuose esamus duomenis, turi būti gautos rodiklių reikšmės, pateiktos paskutiniame stulpelyje. Jei nors viena reikšmė nesutampa, reikia ieškoti klaidų suvedant formules ar duomenis.

2 lentelė. **Daugiakanalė MAS su eile. $\gamma \neq 1$**

MAS tipas	Pradiniai duomenys stulpelyje A (pavyzdys)	Tarpiniai skaičiavimai, B stulpelis (pavyzdys)	Rodikliai C stulpelis (pavyzdys)	Formulės (rodiklių reikšmės)
Daugia kanalė MAS su eile $\gamma \neq 1$.	λ (8) a1	b1 = 1 (1)	c1 =A3^A4*(A6-A6^(A5+1))/((1-A6)*FACT(A4))	1,877
	μ (4) a2	b2 =a3 (2)	c2 =(c1+sum(b1:b4))^-1	$P_0 = 0{,}121$
	a (2) a3	b3 =b2*a3/2 (2)	c3=A3^(A4+A5)*C2/(A4^A5*FACT(A4))	$P_{ats} = 0{,}048$
	n (3) a4	b4=b3*a3/3 (1,3333)	c4 =1-c3	q =0,952
	m (3) a5	...	c5 =a1*c4	$N = 7{,}615$
	γ (0,6667) a6	b(n+1) =b(n)*a3/(n-1)	c6 =c5/a2	$\overline{n}$ =1,904
			c7 =c6/a4.	$\delta = 0{,}635$
			c8=a3^(a4+1)*c2*((1-(a5+1-a5*a6)*a6^a4))/(a4*(1-a6)^2*Fact(a4))	$\overline{m}$ =0,397
			c9 =c8/a1	$\bar{t}_l = 0{,}05$ val.
			c10 =c9+c4/a2	$\bar{t}_s = 0{,}29$ val.

Pastabos: 1. Paskutinis B stulpelio langelis yra su numeriu (n+1). Vadinasi, reikia surinkti tiek eilučių, kad jų būtų viena daugiau, nei yra aptarnaujančių kanalų.

2. Langelyje C2 formulėje turi būti sum (b1:b(n+1).

3. Suvedus pradinius duomenis, reikia patikslinti formulę langelyje C2 ir įsitikinti, kad eilučių B stulpelyje yra viena daugiau, nei yra aptarnaujančių kanalų.

4. Lentelėje pateiktas kontrolinis variantas: surinkus skliausteliuose esamus duomenis, turi būti gautos rodiklių reikšmės, pateiktos paskutiniame stulpelyje. Jei nors viena reikšmė nesutampa, reikia ieškoti klaidų suvedant formules ar duomenis.

3 lentelė. **Vienkanalė MAS su eile. $\alpha = 1$**

MAS tipas	Pradiniai duomenys stulpelyje A		Rodikliai B stulpelis	Formulės (rodiklių reikšmės)
	Duomenų simboliai	Pavyzdys		
Vienkanalė MAS su eile $\alpha = 1$	$\lambda \to$ a1	8	b1 =1/(a5+2)	$P_{ats} = 0,2$
	$\mu \to$ a2	8	b2 =1-b1	$q = 0,8$
	$a \to$ a3 =a1/a2	1	b3=a1*b2	$N = 6,4$
	$n \to$ a4	1	b4 =a5/2*(a5+1)/(a5+2)	$\overline{m} = 1,2$
	$m \to$ a5	3	b5 =b4/a1	$\bar{t}_l$ = 0,15 val.
			b6 =b5+b2/a2	$\bar{t}_s$ = 0,25 val.

Pastaba. Lentelėje pateiktas kontrolinis variantas: surinkus trečiame stulpelyje esamus duomenis, turi būti gautos rodiklių reikšmės, pateiktos paskutiniame stulpelyje. Jei nors viena reikšmė nesutampa, reikia ieškoti klaidų suvedant formules ar duomenis.

4 lentelė. **Vienkanalė MAS su eile. $\alpha \neq 1$**

MAS tipas	Pradiniai duomenys stulpelyje A		Rodikliai B stulpelis	Formulės (rodiklių reikšmės)
	Duomenų simboliai	Pavyzdys		
Vienkanalė MAS su eile $\alpha \neq 1$	$\lambda \to$ a1	0,5	b1 =a3^(a5+1)*(1-a3)/(1-a3^(a5+2))	$P_{ats} = 0,3541$
	$\mu \to$ a2	0,3333	b2 =1-b1	$q = 0,645889$
	$a \to$ a3 =a1/a2	1,5	b3=a1*b2	$N = 0,322945$
	$n \to$ a4	1	b4 =A3^2*((1-A3^A5*(A5+1-A5*A3)))/((1-A3)*((1-A3^(A5+2))))	$\overline{m} = 3,46651$
	$m \to$a5	5	b5 =b4/a1	$\bar{t}_l$ = 6,93 min.
			b6 =b5+b2/a2	$\bar{t}_s$ = 8,871 min.

Pastaba. Lentelėje pateiktas kontrolinis variantas: surinkus trečiame stulpelyje esamus duomenis, turi būti gautos rodiklių reikšmės, pateiktos paskutiniame stulpelyje. Jei nors viena reikšmė nesutampa, reikia ieškoti klaidų suvedant formules ar duomenis.

5 lentelė. **Vienkanalė MAS be eilės**

MAS tipas	Pradiniai duomenys stulpelyje A		Rodikliai C stulpelis	Formulės (rodiklių reikšmės)
	Duomenų simboliai	Pavyzdys		
Vienkanalė MAS be eilės	$\lambda \to$ a1	2	C2 = a1/(a1+a2).	P_{ats} = 0,857
	$\mu \to$ a2	0,333	C3 =1-c2	q = 0,143
			C4 = a1*c3.	N = 0,286

Pastaba. Lentelėje pateiktas kontrolinis variantas: surinkus trečiame stulpelyje esamus duomenis, turi būti gautos rodiklių reikšmės, pateiktos paskutiniame stulpelyje. Jei nors viena reikšmė nesutampa, reikia ieškoti klaidų suvedant formules ar duomenis.

6 lentelė. **Daugiakanalė MAS be eilės**

MAS tipas	Pradiniai duomenys stulpelyje A (pavyzdys)	Tarpiniai skaičiavimai B stulpelis (pavyzdys)	Rodikliai C stulpelis (pavyzdys)	Formulės (rodiklių reikšmės)
Daugiakanalė MAS be eilės	λ (2) a1	b1 = 1 (1)	c1 = (c1+sum(b1:b5))^-1	P_0 = 0,009
	μ (0,333) a2	b2 =a3 (2)	c2=a3^a4*c1/insert/function/FACT(a4)/ ok.	P_{ats} = 0,470
	a (6) a3	b3 =b2*a3/2 (2)	c3=1- C2.	q = 0,530
	n (4) a4	b4 =b3*a3/3...	c4 =a1*c3	N = 1,061
		b5 =b4*a3/4	c5 =c4/a2.	$\overline{n}$ =3,183
		b(n+1) =b(n)*a3/(n -1)	c6 =c5/a2	δ = 0,8

Pastaba. Lentelėje pateiktas kontrolinis variantas: surinkus trečiame stulpelyje esamus duomenis, turi būti gautos rodiklių reikšmės, pateiktos paskutiniame stulpelyje. Jei nors viena reikšmė nesutampa, reikia ieškoti klaidų suvedant formules ar duomenis.

Savitikros užduotys

1. Teoriniai klausimai:

1.1. Apibūdinkite masinio aptarnavimo sistemą.

1.2. Koks procesas yra vadinamas diskrečiųjų būsenų Markovo procesu?

1.3. Išvardykite tris paprasčiausio paraiškų srauto savybes.

1.4. Kaip klasifikuojamos MAS?

1.5. Apibūdinkite santykinę ir absoliučiąją sistemos aptarnavimo gebą. Kokia yra šių rodiklių prasmė?

1.6. Apibūdinkite MAS be eilės. Pateikite pavyzdžių.

1.7. Kuo skiriasi MAS be eilės nuo MAS su eile?

1.8. Kokie rodikliai yra taikomi vertinant darbo efektyvumą MAS be eilės ir MAS su eile?

1.9. Apibūdinkite MAS, kurios paraiškų laukimo eilėje laikas ribotas.

1.10. Pateikite MAS, turinčių skirtingo našumo aptarnavimo kanalus, pavyzdžių.

2. Praktinės užduotys

Išspręskite tokius uždavinius:

2.1. Kirpėjas aptarnauja klientą vidutiniškai per 15 min. Į kirpyklą atvyksta po 5 klientus kas valandą. Klientas laukia eilėje, jei joje yra ne daugiau kaip 4 žmonės. Kiek reikia kirpėjų, kad jie aptarnautų ne mažiau kaip 90 proc. klientų?

Atsakymas

Reikia 2 kirpėjų. Tuomet bus aptarnauta 97 proc. klientų.

2.2. Prie užsienio ambasados gauti vizų laukia grupė piliečių. Vieno piliečio dokumentai tikrinami 10 minučių. Vidutiniškai per valandą atvyksta 8 žmonės, norintys gauti vizą. Dokumentus tikrina du darbuotojai. Jei eilėje jau laukia 10 piliečių, ką tik atvykęs nebestoja į eilę.

Apskaičiuokite, kiek vidutiniškai laiko pilietis laukia eilėje.

Atsakymas

Kliento laukimo eilėje laikas – 3 min.

2.3. Prie užsienio ambasados tarnybos gauti vizų laukia grupė piliečių.

Vieno piliečio dokumentai tikrinami 7,5 min.

Norinčių gauti vizas atvyksta vidutiniškai 8 žmonės per valandą.

Dokumentus tikrina vienas darbuotojas. Jei eilėje jau yra 3 piliečiai, ką tik atvykęs nebeužima eilės.

Reikia apskaičiuoti vidutinį piliečio laukimo eilėje laiką.

Atsakymas

Kliento laukimo eilėje laikas – 9 min.

2.4. Į degalinę prie greitkelio vairuotojai užsuka prisipilti benzino, jei būna laisva nors viena kolonėlė. Tokių automobilių srautas yra 120 automobilių per valandą.

Vienas vairuotojas aptarnaujamas per 6 minutes.

Apskaičiuokite, koks procentas automobilių pravažiuos neaptarnautas, jei degalinėje veikia: a) viena, b) dvi, c) trys kolonėlės;

kiek turi būti kolonėlių, kad būtų aptarnauta ne mažiau kaip 90 proc. visų atvykstančių automobilių.

Atsakymai:

1) nebus aptarnauta 92 proc. automobilių,
2) nebus aptarnauta 85 proc. automobilių,
3) nebus aptarnauta 77 proc. automobilių.

5 TEMA

LOŠIMŲ TEORIJOS METODAI

5.1. Pagrindinės sampratos

Praktinių sprendimų dažniausiai ieškoma esant neapibrėžtoms aplinkybėms, tikslams, veikiant konkurentams arba priešininkams. Pasirodo, ir tokiomis sąlygomis gali būti pasiūlyta geresnių arba blogesnių sprendimų, kurie pateisinami vidutiniškai, t. y. kai taikomi daug kartų.

Suprantama, kad konkretus sprendimas susijęs su tam tikra rizika, nes visos sąlygos nėra tiksliai apibrėžtos. Tačiau dažnai naudinga išnagrinėti įvairius sprendimo variantus ir pasirinkti iš jų geriausią. Tokius uždavinius sprendžia lošimų ir statistinių sprendimų teorija.

Lošimų teorija taikoma, kai susiduria dvi arba daugiau veikiančių žmonių grupių (valstybių, ginkluotųjų pajėgų ir t. t.), kurios turi priešingus tikslus. Sakoma, kad sprendimai priimami ***konfliktinėje situacijoje.*** Vadinasi, lošimų teorija nagrinėja konfliktines situacijas ir siūlo rekomendacijas, kaip jos dalyviai turėtų elgtis.

Kiekviena konfliktinė situacija yra supaprastinama ir sudaromas jos modelis (vadinamasis lošimo modelis), kuris veikia galiojant tam tikroms taisyklėms. Tokių modelių pavyzdžiai – šachmatai, kortos, šaškės ir t. t. Lošimų ***dalyviai*** vadinami ***lošėjais***. Jų gali būti du ir daugiau. Čia nagrinėjamos tik dviejų dalyvių konfliktinės situacijos.

Lošimo taisyklėse numatomi galimi kiekvieno lošėjo veiklos variantai, turima informacija apie priešininko veiksmus ir lošimo rezultatus, gaunamus naudojant po vieną kiekvieno lošėjo variantą.

Lošimo ***suma nulinė***, jei vienas lošėjas išlošia tiek, kiek pralošia kitas, t. y. bendra lošimo suma būna lygi nuliui. Kiekvienas lošimas sudarytas iš ėjimų. Lošimų teorijoje ***ėjimu*** vadinamas vieno varianto pasirinkimas ir jo įgyvendinimas.

Ėjimai gali būti ***atsitiktiniai*** ir ***asmeniniai.***

Atsitiktinis ėjimas – tai vieno iš galimų variantų pasirinkimas taikant atsitiktinių dydžių imitavimo mechanizmą.

Asmeninis ėjimas – tai sąmoningas vieno konkretaus varianto pasirinkimas. Kai kurie azartiniai lošimai sudaryti tik iš atsitiktinių ėjimų (ruletė, kauliuko su skaičiais arba monetos mėtymas ir t. t.), kiti – tik iš asmeninių ėjimų (šachmatai), dar kiti yra mišrūs (kortos).

Lošimų teorijoje nagrinėjami tik lošimai su asmeniniais ėjimais. Šios teorijos tikslas – rekomenduoti dalyviams racionalias sprendimų priėmimo strategijas. Čia ***strategija*** suprantama kaip rekomendacijų aibė konkrečioje konfliktinėje situacijoje.

Lošimas vadinamas ***baigtiniu***, jeigu kiekvienas iš dalyvių naudojasi ribotu variantų skaičiumi, ir ***begaliniu***, jei nors vienas dalyvis naudojasi begaliniu variantų skaičiumi.

Lošimų teorijos tikslas – rekomenduoti kiekvienam dalyviui optimaliąją strategiją. ***Optimalioji*** – tai tokia strategija, kuri garantuoja maksimalų vidutinį išlošį, jei lošiama daug kartų. Nustatant optimaliąją strategiją laikomasi principo, kad kitas lošimo dalyvis yra ne mažiau protingas už mus ir daro viską, kad mes išloštume kuo mažiau.

5.2. Mokesčių matrica

Tarkime, lošimo dalyvis A gali pasirinkti vieną iš m strategijų, o dalyvis B – vieną iš n strategijų. Toks lošimas vadinamas $m \times n$ lošimu.

Pažymėję pirmojo dalyvio strategijas $A_1, A_2, \dots, A_m$, o antrojo – $B_1, B_2, \dots, B_n$, galime apskaičiuoti kiekvienos poros strategijų išlošius a_{ij}. Apskaičiavę visus tokius rezultatus ir surašę juos į lentelę, gauname ***mokesčių,*** arba ***lošimų, matricą*** (1 lent.).

1 lentelė. **Mokesčių matrica**

A_i	Bj						α_i
	B_1	B_2	…	B_j	…	B_n	
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}	α_2
…	...	...	...	...	...	...	...
A_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}	α_i
…	...	...	...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}	α_m
β_j	β_1	β_2	...	β_j	...	β_n	

Sudaryti lošimų matricas esant paprastoms situacijoms nesunku, o esant sudėtingoms – nelengva. Pasitelkę konkretų pavyzdį išnagrinėsime, kaip jos sudaromos.

Uždavinys 5.1. Tarkime, du vaikai lošia tokį lošimą: vienas iš jų rankoje laiko 50 centų monetą, o kitas spėja, kurioje rankoje ši moneta yra. Jeigu jis teisingai nurodo ranką su moneta, moneta atitenka jam, jei neteisingai – 50 centų turi sumokėti pirmajam vaikui. Reikia sudaryti mokesčių matricą.

*Sprendimas***.** Pažymime pirmojo vaiko strategijas: A_1 – laikyti monetą dešinėje rankoje, A_2 – kairėje; antrojo vaiko strategijas: B_1 – spėti, kad moneta yra dešinėje, B_2 – kairėje rankoje.

Kiekvienas iš dalyvių turi po dvi strategijas, vadinasi, lošimas 2×2.

Braižome mokesčių matricos lentelę (2 lent.).

Nagrinėjame A_1B_1 atvejį, t. y. kai pirmasis vaikas slepia monetą dešinėje rankoje, o antrasis nurodo dešinę pirmojo vaiko ranką (atspėja). Tada pirmasis vaikas pralošia monetą ir $a_{11} = -50$ centų. Situacijoje A_2B_2 rezultatas yra toks pat ir $a_{22} = -50$ centų. Situacijose A_1B_2 ir A_2B_1 išlošia pirmasis vaikas ir todėl $a_{12} = a_{21} = 50$ centų.

2 lentelė. **Mokesčių matrica**

A_i	B_j	
	B_1	B_2
A_1	-50	50
A_2	50	-50

Šio uždavinio sąlygą galima pritaikyti norint geriau suvokti lošimų teorijos esmę. Jei lošiama tik vieną kartą, jokios praktinės rekomendacijos nėra tikslingos. Kas išloš, lemia tik atsitiktinumas.

Tarkime, kad dabar vaikai lošia tą patį lošimą daug kartų. Tada, jei pirmasis vaikas laikys monetą visą laiką kurioje nors vienoje rankoje, tai po kelių partijų antrasis vaikas pastebės tai ir kiekvieną kartą išloš. Lygiai taip pat atsitiks, jei antrasis vaikas pasirinks vieną iš savo strategijų ir nuolatos ją taikys. Vadinasi, nė vienam iš vaikų netikslinga rinktis tik vieną kurią nors strategiją.

Čia yra tas atvejis, kai reikia taikyti ***mišriąją strategiją***, t. y. kelias strategijas, kiekviena iš kurių turi būti taikoma su tam tikra tikimybe. Nesigilinant į tų tikimybių apskaičiavimo metodiką, šiuo paprastu atveju galima tvirtinti, kad abu vaikai turi taikyti abi strategijas su vienodomis tikimybėmis, kurios yra lygios 0,5.

Kiekvienas iš vaikų gali taikyti optimaliąją strategiją tik atsitiktiniu būdu keisdamas savo grynąsias strategijas. Šiuo atveju vaikai kiekvieną kartą prieš slėpdami monetą arba spėdami, kurioje rankoje ji yra, gali mesti kitą monetą, ir, atsižvelgdami į tai, kas atsivertė – herbas ar skaičius, slėpti (nurodyti) atitinkamoje rankoje. Be abejo, monetos mėtymo procedūra turi būti atlikta nedalyvaujant kitam vaikui.

Mokesčių matrica yra pagrindas, kuriuo remiantis gali būti rastas uždavinio sprendimas. Žinomi keli lošimų teorijos uždavinių sprendimo būdai. Vienas iš jų yra vadinamas minimakso principu.

5.3. Minimakso principo taikymas

Tarkime, suformuluotas lošimų teorijos uždavinys su $m \times n$ mokesčių matrica (žr. 1 lent.). Čia indeksu i pažymėtos mūsų strategijos (A_1, A_2, ..., A_i, ..., A_m), o indeksu j – priešininko strategijos (B_1, B_2, ..., B_j, ..., B_n). Sakykime, kad taikyti mišriųjų strategijų nenorime, t. y. norime rinktis tik vieną kurią nors strategiją.

Reikia nustatyti, kuri strategija yra naudingiausia.

Matyt, reikia samprotauti taip: jei pasirinksime tam tikrą strategiją A_i, tai priešininkas atsakys strategija B_j, kuri sumažins mūsų išlošius iki minimumo. Suformulavus šiuos teiginius, kiekvienoje mokesčių matricos eilutėje reikia rasti minimalų skaičių iš turimų toje eilutėje, t. y. apskaičiuoti reikšmes

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}. \qquad (1)$$

Gautos reikšmės yra surašomos papildomame mokesčių matricos stulpelyje. Jei nenorime rizikuoti, iš visų lošėjo A strategijų turime pasirinkti tą, kurios a_i reikšmė yra maksimali, t. y.

$$\alpha = \max_i \alpha_i, \qquad (2)$$

arba, sujungę (1) ir (2) formules, gauname apatinę lošimo vertę

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}. \qquad (3)$$

Ši reikšmė α yra vadinama ***apatine lošimo verte,*** arba ***maksimininiu išlošiu***, arba trumpai ***maksiminu***.

Ta strategija iš A_i, kurią atitinka gauta α reikšmė, vadinama ***maksiminine strategija***. Jeigu taikysime tik šią (maksimininę) strategiją, tai, kad ir koks būtų priešininko pasirinkimas, mes išlošime ne mažiau negu apatinė lošimo vertė α. Tai – tas garantuotas minimumas, kuris gaunamas pasirinkus pačią atsargiausią strategiją.

Uždavinį galima išspręsti ir už priešininką. Priešininkas turi sumažinti mūsų išlošius, todėl jis persvarsto visas savo strategijas ir surašo didžiausius mūsų išlošius, t. y. atlieka skaičiavimus pagal formulę

$$\beta_j = \max_i a_{ij}. \qquad (4)$$

Iš visų tų maksimalių reikšmių reikia pasirinkti tą strategiją, kuri atitinka mažiausią dalyvio B pralošimo reikšmę, t. y.

$$\beta = \min_j \beta_j. \qquad (5)$$

Sujungę (4) ir (5) formules, gauname bendrą formulę

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}. \qquad (6)$$

Ši reikšmė β vadinama ***viršutine lošimo verte,*** arba ***minimaksiniu išlošiu***, arba trumpai ***minimaksu***, o atitinkanti β reikšmę strategija vadinama ***minimaksine strategija***. Laikydamasis šios strategijos, žaidimo dalyvis B praloš ne daugiau kaip β.

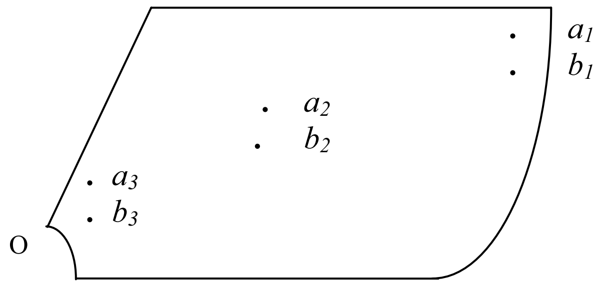
Taigi abiejų žaidimo dalyvių atsargiausios strategijos yra vadinamos minimaksinėmis strategijomis.

Uždavinys 5.2. Priešininko lėktuvas atakuoja raketomis zenitinį raketų kompleksą, kuris savo ruožtu bando šį lėktuvą sunaikinti. Lėktuvo ir zenitinio raketų komplekso sunaikinimo tikimybės priklauso nuo raketų paleidimo nuotolių. Kiekvienas iš dvikovos dalyvių gali pasirinkti raketos paleidimo nuotolį. Tarkime, kad iš lėktuvo gali būti paleistos raketos viename iš taškų b_1, b_2, b_3, o zenitinis raketų kompleksas gali atakuoti lėktuvą viename iš taškų a_1, a_2, a_3. Šių taškų vieta erdvėje parodyta 1 paveiksle. Kiekvienas konflikto dalyvis gali atakuoti taikinį tik vieną kartą. Lėktuvas, paleidęs raketą, apsisuka ir grįžta į savo aerodromą.

Tikimybė, kad priešininko raketos, paleistos iš lėktuvo, sunaikina zenitinį raketų kompleksą, yra 0,1 (raketos paleidimo taškas b_1), 0,3 (taškas b_2) ir 0,5 (taškas b_3). Lėktuvo sunaikinimo priešlėktuvinėmis raketomis tikimybė – 0,3 (taške a_1), 0,5 (taške a_2) ir 0,7 (taške a_3). Šios tikimybės nustatytos modeliuojant dvikovos rezultatus.

Reikia sudaryti mokesčių matricą ir apskaičiuoti apatinę ir viršutinę lošimo vertę.

Paveiksle zenitinis raketų kompleksas yra taške 0, o uždara kreive pavaizduota to komplekso taikinių naikinimo zona vertikalioje plokštumoje.



1 pav. **Priešininkų strategijų taikymo variantai**

*Sprendimas***.** Pažymime zenitinio raketų komplekso strategijas: A_1 – naikinti lėktuvą taške a_1, A_2 – taške a_2, A_3 – taške a_3; priešininko lėktuvo strategijas atitinkamai: B_1 – paleisti raketas iš taško b_1, B_2 – iš taško b_2 ir B_3 – iš taško b_3.

Uždavinio sąlygoje pateiktos taikinių sunaikinimo tikimybės gali būti pažymėtos taip: $P(L/a_1) = 0{,}3$, $P(L/a_2) = 0{,}5$, $P(L/a_3) = 0{,}7$; čia $P(L/a_i)$ yra sąlyginė lėktuvo (L) sunaikinimo tikimybė, jei jis atakuojamas taške a_i; $P(Z/b_1) = 0{,}1$, $P(Z/b_2) = 0{,}3$, $P(Z/b_3) = 0{,}5$; čia $P(Z/b_j)$ yra sąlyginė tikimybė, kad zenitinis (Z) kompleksas bus sunaikintas, jei jis atakuojamas iš taško b_j.

Nubraižome mokesčių matricos 3 lentelę. Nagrinėjame kiekvieną strategijų porą. Imame strategijas A_1B_1. Tikimybė, kad zenitinis kompleksas sunaikins lėktuvą taške a_1, yra 0,3. Jeigu lėktuvas nebus sunaikintas šiame taške, o tokia tikimybė yra lygi (1–0,3), tai tikimybė, kad jis sunaikins zenitinį kompleksą, yra 0,1. Vadinasi, tikimybė, kad zenitinis kompleksas bus sunaikintas, yra $(1 - 0{,}3) \cdot 0{,}1 = 0{,}07$, todėl mokesčių matricos elementas $a_{11} = 0{,}3 - 0{,}07 = 0{,}23$.

3 lentelė. **Mokesčių matrica**

A_i	B_j			α_i
	B_1	B_2	B_3	
A_1	0,23	0,09	-0,05	-0,05
A_2	-0,1	0,35	0,25	-0,1
A_3	-0,1	-0,3	0,55	-0,3
β_j	0,23	0,35	0,55	

Imame strategijų porą A_1B_2. Zenitinis kompleksas atakuoja lėktuvą taške a_1. Tikimybė sunaikinti lėktuvą – 0,3. Jei lėktuvas nebuvo sunaikintas (tokia tikimybė yra 1–0,3), tai jis iš taško b_2 atakuos zenitinį kompleksą, ir tikimybė, kad sunaikins jį, yra 0,3, todėl zenitinio komplekso sunaikinimo tikimybė bus

$$(1 - 0{,}3) \cdot 0{,}3 = 0{,}21,$$

o mokesčių matricos elementas

$$a_{12} = 0{,}3 - 0{,}21 = 0{,}09.$$

Nagrinėjame strategijas A_1B_3. Tikimybė, kad zenitinis kompleksas sunaikins lėktuvą, yra 0,3, o lėktuvas zenitinį kompleksą –

$$(1 - 0{,}3) \cdot 0{,}5 = 0{,}35,$$

todėl mokesčių matricos elementas

$$a_{13} = 0{,}3 - 0{,}35 = -0{,}05.$$

Kai taikomos strategijos A_2B_1, lėktuvas pirmas atakuoja zenitinį kompleksą iš taško b_1, ir tikimybė, kad jį sunaikina, – 0,1. Paskui jis apsisuka ir nuskrenda, todėl mokesčių matricos elementas

$$a_{21} = 0 - 0{,}1 = -0{,}1.$$

Strategijų pora A_2B_2: lėktuvo sunaikinimo tikimybė – 0,5, zenitinio komplekso – $(1 - 0{,}5) \cdot 0{,}3 = 0{,}15$, vadinasi, $a_{22} = 0{,}5 - 0{,}15 = 0{,}35$.

Taikant strategijas A_2B_3, mokesčių matricos elementas

$$a_{23} = 0{,}5 - (1 - 0{,}5) \cdot 0{,}5 = 0{,}25.$$

Taikant strategijas A_3B_1, mokesčių matricos elementas

$$a_{31} = 0 - 0{,}1 = -0{,}1.$$

Kai pasirenkamos strategijos A_3B_2, mokesčių matricos elementas

$$a_{32} = 0 - 0{,}3 = -0{,}3,$$

o strategijų poros A_3B_3 mokesčių matricos elementas

$$a_{33} = 0{,}7 - (1 - 0{,}7) \cdot 0{,}5 = 0{,}55.$$

Taigi sudaryta visa mokesčių matrica. Kiekvieno tos matricos elemento prasmė yra taikinių sunaikinimo vidurkis.

Gali susidaryti įspūdis, kad tie elementai yra taikinių sunaikinimo tikimybės ir todėl jos negali būti neigiamos, kaip yra kai kurios matricos langeliuose. Įsidėmėtina, kad atsitiktinio dydžio, turinčio dvi reikšmes (0 ir 1), įvykio tikimybė ir vidurkis sutampa:

$$m_x = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p.$$

Ieškome apatinės ir viršutinės lošimo vertės. Nagrinėdami gautą lentelę, apskaičiuojame kiekvienos eilutės minimalias reikšmes: –0,05; –0,1; –0,3. Surašome jas paskutiniame tos lentelės stulpelyje. Taikydami (2) formulę, iš šių reikšmių turime pasirinkti didžiausią, todėl apatinė lošimo vertė $\alpha = -0{,}05$.

Norėdami rasti viršutinę lošimo vertę, taikome (4)–(6) formules, t. y. iš pradžių kiekviename stulpelyje išskiriame didžiausias reikšmes ir surašome jas paskutinėje lentelės eilutėje.

Iš šių reikšmių pasirenkame mažiausią, kuri ir yra viršutinė lošimo vertė $\beta = 0{,}23$.

Kartu galima nustatyti zenitinio komplekso maksimininę strategiją: tai strategija A_1, nes šiuo atveju pralošiama mažiausiai (–0,05). Lėktuvo minimaksinė strategija yra B_1, nes priešininkas šiuo atveju negali išlošti daugiau kaip 0,23.

Nagrinėdami šį uždavinį matome, kad galima padidinti strategijų skaičių, keisti sąlygas, pvz., kas pirmas atakuoja, tęsiama ar ne dvikova ir t. t. Taip galima padidinti uždavinių, kurie gali būti sprendžiami pagal lošimų teoriją, skaičių.

Išvada. Lėktuvą atakuoti tikslinga tolimiausiame taške a_1. Toks pat sprendimas naudingas priešininkui – atakuoti zenitinį kompleksą iš taško b_1. Taikydami šias strategijas, pralošime ne daugiau kaip 0,05, o priešininkas – ne daugiau kaip 0,23. Tačiau šis sprendimas, jei jis taikomas nuolatos, sudaro sąlygas, skatinančias keisti strategijas, pvz., jei visą laiką taikome strategiją A_1, o priešininkas – B_1, jis pralošia 0,23. Vietoj strategijos B_1 jis gali taikyti strategiją B_3 ir išlošti 0,05. Tačiau jei jis nuolat taikys strategiją B_3, mes galime taikyti strategiją A_3 ir išlošti 0,55 ir t. t. Taigi sprendimas A_1B_1 sukuria nestabilią situaciją.

Matyt, gali būti ir toks atvejis, kai apatinė ir viršutinė lošimo vertės sutampa, t. y. $\alpha = \beta = \nu$; čia ν yra vadinama ***grynąja lošimo verte***.

Toks atvejis vadinamas lošimu ***su balno tašku***, o strategijos, atitinkančios šį tašką, vadinamos ***optimaliosiomis strategijomis.*** Kartu šios strategijos sudaro lošimo uždavinio sprendimą.

Žaidimų su balno tašku yra kur kas daugiau, negu dažnai galvojama. Įrodyta, kad visi lošimai, kuriuose konflikto dalyviai žino visus savo ir priešininko prieš tai padarytus ėjimus, turi optimaliųjų strategijų, sudarančių lošimo uždavinio sprendimą, porą. Tai šachmatai, šaškės, kai kurie kortų žaidimai. Tačiau šiuose ir kituose tokio tipo žaidimuose dėl per didelio strategijų skaičiaus sudaryti mokesčių matricą ir rasti uždavinio sprendimą negalima net pasitelkus visas kompiuterių galimybes.

5.4. Sprendimai taikant mišriąsias strategijas

Dauguma praktinių uždavinių, kurie gali būti sprendžiami pasitelkiant lošimų teoriją, vis dėlto retai turi vieną optimaliųjų strategijų porą (arba kelias, bet vienodos grynosios lošimo vertės). Kai apatinė ir viršutinė lošimo vertės yra skirtingos, kyla klausimas, ar negalima padidinti išlošio taikant ne maksiminę (arba minimaksinę) strategiją, o kokius nors jų derinius. Pasirodo, tai galima, jei taikomos mišriosios strategijos, t. y. kelios grynosios strategijos su tam tikromis tikimybėmis.

Norint rasti uždavinio sprendimą taikant mišriąsias strategijas, reikia apskaičiuoti kiekvienos grynosios strategijos taikymo tikslingumą, t. y. kiekvienos grynosios strategijos pasirinkimo tikimybes. Pažymėkime jas $p_1, p_2, \ldots, p_m$ ir $q_1, q_2, \ldots, q_n$; čia p_i – strategijos A_i pasirinkimo tikimybė; q_j – strategijos B_j pasirinkimo tikimybė. Šios tikimybės kartu sudaro lošimo uždavinio sprendimą. Dažnai jis žymimas taip:

$$S^*_A = (p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_m),$$
$$S^*_B = (q_1, q_2, \ldots, q_j, \ldots, q_n). \tag{7}$$

Be abejo, turi būti įvykdytos sąlygos:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_i + \ldots + p_m = 1,$$
$$q_1 + q_2 + \ldots + q_j + \ldots + q_n = 1.$$

Jei vienas iš žaidėjų taiko optimaliąją mišriąją strategiją S^*_A, tai kitam žaidėjui nenaudinga nesilaikyti optimaliosios mišriosios strategijos S^*_B.

Įrodyta, kad kiekvienas baigtinis lošimas turi sprendimą grynųjų arba mišriųjų strategijų srityje ir grynoji lošimo vertė atitinka nelygybes

$$\alpha \le \nu \le \beta .$$

Tai reiškia, kad taikydami mišriąją strategiją galime padidinti savo išlošį, palyginti su išlošiu α, kai taikoma viena maksimininė strategija. Tą patį galima pasakyti ir apie kitą lošimo dalyvį: jis gali sumažinti savo nuostolius, pasirinkdamas mišriąją strategiją.

Kai kurios iš tikimybių p_i, q_j gali būti lygios nuliui. Vadinasi, kai kurios strategijos (kaip tik tos, kurių panaudojimo tikimybės yra lygios nuliui) nėra taikomos.

Mišriajai optimaliajai sprendimo strategijai priklausančios strategijos vadinamos ***aktyviosiomis strategijomis.***

Įrodyta teorema, kad jei vienas iš lošėjų taiko savo optimaliąją mišriąją strategiją, tai jo išlošis v nesikeičia ir nepriklauso nuo to, kokia proporcija kitas lošėjas taiko savo aktyviąsias strategijas.

Sprendžiant bet kurį lošimų teorijos uždavinį, reikia maksimaliai jį supaprastinti. Tai galima padaryti, jei yra dubliuojančių arba nenaudingų strategijų. Tokia strategijų išbraukimo procedūra yra vadinama mokesčių matricos ***redukavimu.***

Dubliuojančios strategijos nustatomos sudarius mokesčių matricą. Tai reiškia, kad reikia išbraukti visas strategijas, kurios turi vienodus mokesčių matricos elementus, ir palikti vieną iš jų. Tai daroma taikant strategijas A_i ir B_j.

Nenaudingos strategijos yra nustatomos taip. Nagrinėjame visas strategijas A_i. Jei tarp jų yra tokių, kurių kiekvienas matricos elementas yra ne didesnis už kurios nors kitos mūsų strategijos atitinkamą elementą, tai pirmoji strategija turi (gali) būti išbraukta.

Jei nagrinėdami priešininko strategijas B_j randame tokią, kurios visi matricos elementai yra ne mažesni už kurios nors kitos strategijos atitinkamus elementus, galime ją išbraukti, nes priešininkui ji yra nenaudinga.

Redukavimo procedūra geriau išmokstama sprendžiant konkretų uždavinį.

Uždavinys 5.3. Reikia supaprastinti lošimą, kurio mokesčių matrica turi tokias reikšmes:

4 lentelė. **Pradinė mokesčių matrica**

A_i	B_j			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	4	2	1
A_2	0	2	1	3
A_3	6	3	0	1
A_4	3	4	2	1

Sprendimas. Nagrinėdami lošėjo A strategijas pastebime, kad A_1 ir A_4 turi vienodus matricos elementus. Vadinasi, bet kurią iš šių strategijų galima išbraukti kaip pasikartojančią. Tarkime, išbraukiame A_4 strategiją (5 lent.).

Toliau nagrinėdami 2 mokesčių matricą matome, kad jei priešininkas taiko strategiją B_2, tai jis visada pralošia daugiau negu taikydamas strategiją B_3. Vadinasi, B_2 reikia išbraukti kaip nenaudingą.

5 lentelė. **2 mokesčių matrica**

A_i	B_j			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	4	2	1
A_2	0	2	1	3
A_3	6	3	0	1

6 lentelė. **3 mokesčių matrica**

A_i	B_j		
	B_1	B_3	B_4
A_1	3	2	1
A_2	0	1	3
A_3	6	0	1

Paskutinė 3 matrica jau nebegali būti supaprastinta, vadinasi, ji ir yra redukuota lošimo matrica.

5.5. Lošimas 2 × 2

Tai paprasčiausias lošimų teorijos uždavinys. Šis uždavinys gali turėti balno tašką. Tuomet sprendimas randamas taikant minimaksinį principą. Kai šis uždavinys neturi balno taško, sprendimas randamas sudarius lygčių sistemą

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v, \\ p_1 + p_2 = 1. \end{cases} \tag{8}$$

Jos gaunamos iš mokesčių matricos samprotaujant taip: konflikto dalyviui pasirinkus vieną iš savo strategijų B_j, lošėjas A gali maksimaliai išlošti, jei taiko savo strategijas A_1 ir A_2, kurių tikimybės yra p_1 ir p_2. Gaunamos dvi lygtys, o trečia lygtis yra būtina sąlyga.

Išsprendę (8) lygčių sistemą, apskaičiuojame ieškomas strategijų taikymo tikimybes ir grynąją lošimo vertę:

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \tag{9}$$

$$p_2 = 1 - p_1 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \tag{10}$$

$$v = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \tag{11}$$

Tokiu pat būdu apskaičiuojamos priešininko strategijų taikymo tikimybės. Sudarome lygčių sistemą

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = v, \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = v, \\ q_1 + q_2 = 1. \end{cases} \tag{12}$$

Išsprendę šią lygčių sistemą, apskaičiuojame tikimybes

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \tag{13}$$

$$q_2 = 1 - q_1. \tag{14}$$

Taigi uždavinio sprendimas yra $S_A^* = (p_1,\ p_2)$, $S_B^* = (q_1,\ q_2)$.

Šias formules taikome spręsdami konkretų uždavinį.

Uždavinys 5.4. Išspręsti 5.1 uždavinį taikant (9)–(14) formules.

*Sprendimas***.** Žinomos mokesčių matricos elementų reikšmės: $a_{11} = -50$, $a_{12} = 50$, $a_{21} = 50$, $a_{22} = -50$. Pagal (9) formulę apskaičiuojame strategijos A_1 taikymo tikimybę

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{-50 - 50}{-50 - 50 - 50 - 50} = \frac{-100}{-200} = 0{,}5.$$

Toliau apskaičiuojame strategijos A_2 taikymo tikimybę

$$p_2 = 1 - p_1 = 0{,}5$$

ir grynąją lošimo vertę

$$v = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{-50(-50) - 50 \cdot 50}{-200} = \frac{0}{-200} = 0 .$$

Pagal (13) ir (14) formules apskaičiuojame kito lošimo dalyvio strategijų taikymo tikimybę

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{-50 - 50}{-200} = \frac{-100}{-200} = 0{,}5 ,$$

$$q_2 = 1 - q_1 = 1 - 0{,}5 = 0{,}5.$$

Išvados:

1. Šie apskaičiavimai patvirtino intuityvų sprendimą, kad abu konflikto dalyviai turi taikyti savo strategijas su vienodomis tikimybėmis.

2. Grynoji lošimo vertė yra lygi nuliui. Tai reiškia, kad ilgai lošdami lošėjai nieko neišloš.

5.6. Lošimai 2 × n ir m × 2

Tokios rūšies lošimų sprendimai randami taikant grafinį būdą. To būdo esmė yra tokia. Tarkime, sudaryta mokesčių matrica 2 × n. Vadinasi, ją sudaro dvi eilutės ir n stulpelių. Pasitelksime konkretų pavyzdį, padedantį perprasti grafinio sprendimo prasmę.

Uždavinys 5.5. Žinoma lošimo 2 × 6 mokesčių matrica (7 lent.).

7 lentelė. **Mokesčių matrica**

A_i	B_j					
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	5	5	1	2	5	0
A_2	1	2	3	2,5	0	5

Reikia išspręsti šį uždavinį, t. y. apskaičiuoti $S^*_A = (p_1,\ p_2)$ ir $S^*_B = (q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_6)$.

Sprendimas. Nagrinėjame turimą mokesčių matricą. Pasirodo, ją galima redukuoti. Strategijos B_1 ir B_2 priešininkui yra nenaudingos, nes jis pralošia daugiau, negu taikydamas strategiją B_5. Strategijas B_1 ir B_2 išbraukiame. Gauname 8 lentelę.

8 lentelė. **Mokesčių matrica**

A_i	B_j			
	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	1	2	5	0
A_2	3	2,5	0	5

Ašyje 0x, pasirinkę kokį nors mastelį (2 pav.), pažymime vieneto ilgio atkarpą. Tos atkarpos galuose nubraižome dvi ašiai 0x statmenas tieses ir vienodu masteliu pažymime juose taškus, kurių aibė turi apimti didžiausius ir mažiausius mokesčių matricos elementus (šiame pavyzdyje nuo 0 iki 5).

Patogumo dėlei šiuos statmenis vadinsime kaire ir dešine ašimis. Kairėje ašyje žymėsime taškus, atitinkančius A_1 strategiją, dešinėje – A_2 strategiją.

Tarkime, priešininkas taiko B_3 strategiją. Šiuo atveju kairėje ašyje reikia pažymėti tašką $a_{13} = 1$, o dešinėje – tašką $a_{23} = 3$. Šiuos taškus sujungiame tiese ir pažymime jos galus raidėmis B_3B_3, kad būtų aišku, jog tai atvejis, kai priešininkas taiko B_3 strategiją.

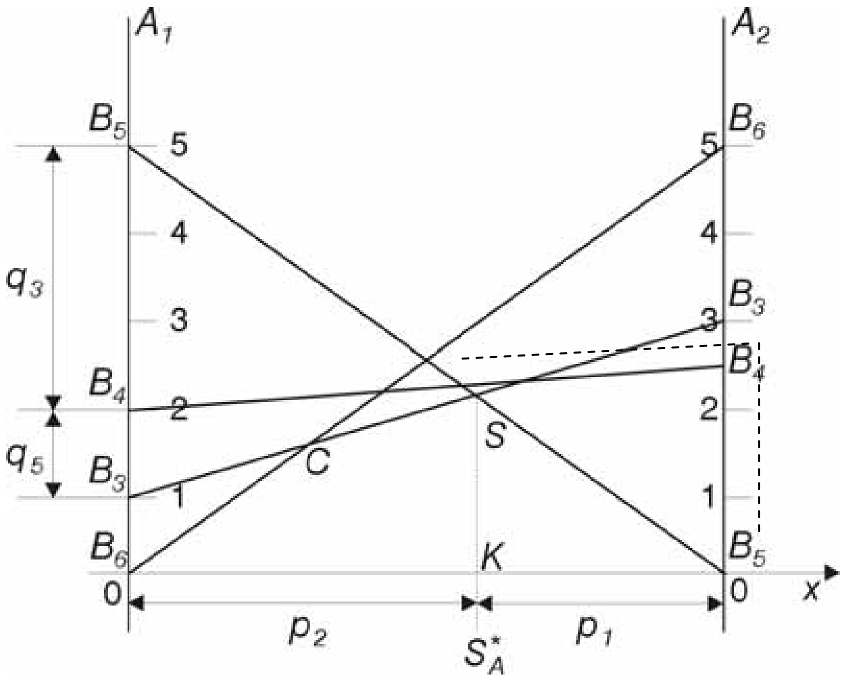
Tokiu pat būdu brėžiamos visos kitos tiesės B_jB_j.

Taikant strategiją B_4 : $a_{14} = 2$, $a_{24} = 2{,}5$; strategiją B_5 : $a_{15} = 5$, $a_{25} = 0$; strategiją B_6 : $a_{16} = 0$, $a_{26} = 5$.

Nubrėžus visas šias tieses, galima išskirti laužtinę, žyminčią apatinę lošimo vertę B_6CSB_5, t. y. esančią žemiau visų kitų galimų laužtinių. Šioje laužtinėje yra lošėjo A minimalūs išlošiai, kai jis taiko kokias nors savo mišriąsias arba grynąsias strategijas. Matome, kad lošėjo A maksimalus išlošis yra taške S, o to taško ordinatė yra lygi grynajai lošimo vertei v, jei jis taiko savo strategijas A_1 ir A_2, kurių tikimybės atitinkamai proporcingos atkarpoms KB_5 ir KB_6.

Pamatavę atkarpos KB_5 ilgį ir padaliję jį iš ilgio OB_5 nustatome, kad $p_1 = 0{,}41$. Vadinasi, $p_2 = 1 - p_1 = 0{,}59$ ir uždavinio sprendimas yra

$$S^*_A = (0{,}41;\ 0{,}59).$$



2 pav. **Grafinis lošimo 2 x 6 sprendimo būdas**

Taško S ordinatė yra lygi 2, todėl grynoji lošimo vertė $\nu = 2$.

Šį uždavinį galima išspręsti ir už priešininką. Jo aktyviosios strategijos atitinka tas strategijas, kurios susikerta taške S. Čia susikerta strategijos B_3 ir B_5. Vadinasi, tik jas ir naudinga kitam lošimo dalyviui taikyti, t. y. $S^*_B = (q_3, q_5)$. Šios tikimybės apskaičiuojamos taip pat kaip tikimybės p_1 ir p_2.

Kairiojoje ašyje (2 pav.) pažymima atkarpa B_3B_5. Tuomet

$$q_3 = \frac{B_4B_5}{B_3B_5} = \frac{2}{3} = 0{,}75\ , \quad q_5 = \frac{B_3B_4}{B_3B_5} = \frac{1}{4} = 0{,}25\,.$$

Vadinasi, kito lošėjo optimalioji mišrioji strategija yra

$$S^*_B = (q_3 = 0{,}75\ ;\ q_5 = 0{,}25).$$

Tikslus sprendimas, gautas analitiniu būdu yra toks:

$$S^*_A = (p_1 = 0{,}43;\ p_2 = 0{,}57),$$
$$S^*_B = (q_1 = 0{,}71;\ q_2 = 0{,}29),$$
$$v = 2{,}14.$$

Išvada. Lošėjas A turi taikyti savo mišriąją strategiją su tikimybėmis 0,5. Lošėjas B turi taikyti tik dvi savo strategijas B_3 ir B_5, o strategiją B_3 taikyti vidutiniškai du kartus dažniau nei strategiją B_5. Pirmasis lošėjas, taikydamas tokias mišriąsias strategijas, išlošia vidutiniškai du vienetus, o antrasis – tiek pat pralošia.

Formuluojame uždavinio $2\times n$ sprendimo grafiniu būdu tvarką bendruoju atveju (2 pav.):

1. Ant ašies $0x$ pažymime vieneto ilgio atkarpą bet kokiu masteliu. Tos atkarpos galuose brėžiame statmenas ašiai Ox tieses. Vienodu masteliu ant šių tiesių pažymime taškus, kurių aibė turi apimti didžiausius ir mažiausius mokesčių matricos elementus. Toliau tas tieses vadiname kaire ir dešine ašimis.

2. Nagrinėjame pirmą kito lošėjo strategiją B_1. Ant kairės ašies pažymime tašką a_{11}, ant dešinės – a_{21}. Šiuos taškus sujungiame tiese ir tiesės galus pažymime raidėmis B_1B_1. Taip pat brėžiame visas kitas tieses B_jB_j, $j = 2, 3, ..., n$.

3. Iš 2 punkte gautų tiesių B_jB_j aibės išskiriame laužtinę, esančią žemiau visų kitų galimų laužtinių. Pažymime tos laužtinės tašką su didžiausia ordinate. Šis taškas interpretuoja uždavinio sprendimą (kad būtų konkrečiau, pažymime jį raide S).

4. Iš taško S nubrėžiame statmenį į ašį $0x$. Šis statmuo dalija vienetinę atkarpą į dvi dalis. Pažymime to taško projekciją raide K. To taško atstumas iki dešinės ašies yra proporcingas strategijos A_1 taikymo tikimybei, o iki kairės ašies – strategijos A_2 taikymo tikimybei. Išmatavus tų atkarpų ilgius ir padalijus iš mastelio, gaunamos tikimybės p_1 ir p_2.

5. Taško S projekcija ant ordinačių ašių nustato grynąją lošimo vertę.

6. Kito lošėjo aktyviosios strategijos yra tos, kurios eina per tašką S. Jei jų yra daugiau kaip dvi, pasirenkamos bet kurios dvi strategijos.

7. Lošėjo B dviejų grynųjų strategijų taikymo tikimybės apskaičiuojamos taip. Naudodamiesi viena bet kuria ordinačių ašimi, nustatome visą atkarpos ilgį tarp jo aktyviųjų strategijų. Taško S projekcija ant tos ašies dalija šią atkarpą į dvi dalis, kurių ilgiai proporcingi aktyviųjų strategijų taikymo tikimybėms.

Nustačius kito lošėjo (B) aktyviąsias strategijas, uždavinį $2 \times n$ galima spręsti kaip uždavinį 2×2, nes priešininkas irgi taiko tik dvi strategijas. Parodysime tai spręsdami 5.5 uždavinį analitiniu būdu.

U ž d a v i n y s 5.6. Reikia išspręsti uždavinį 5.5 žinant, kad lošėjo B aktyviosios strategijos yra B_3 ir B_5.

*Sprendimas***.** Nauja mokesčių matrica atrodo taip (9 lent.):

9 lentelė. **Mokesčių matrica**

A_i	B_j		α_i
	B_3	B_5	
A_1	1	4	1
A_2	3	0	0
β_j	3	4	

Taikydami minimakso metodą nustatome, kad $\alpha = 1$, $\beta = 3$, t. y. $\alpha \neq \beta$ ir sprendimas yra mišriųjų strategijų aibėje. Pagal (9) formulę apskaičiuojame p_1, t. y.

$$p_1 = \frac{a_{25} - a_{23}}{a_{13} + a_{25} - a_{15} - a_{23}} = \frac{0-3}{1+0-4-3} = \frac{-3}{-6} = 0{,}5.$$

Iš čia $p_2 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

Išvada. Gautos tokios pat strategijų A_i taikymo tikimybės kaip ir sprendžiant šį uždavinį grafiniu būdu.

Grynąją lošimo vertę skaičiuojame pagal (11) formulę

$$v = \frac{a_{25}a_{13} - a_{15}a_{23}}{a_{13} + a_{25} - a_{15} - a_{23}} = \frac{0 \cdot 1 - 4 \cdot 3}{-6} = \frac{-12}{-6} = 2.$$

Lošėjo B strategijų tikimybes apskaičiuojame pagal (13) ir (14) formules

$$q_3 = \frac{a_{25} - a_{15}}{a_{13} + a_{25} - a_{15} - a_{23}} = \frac{-4}{-6} = 0{,}667,$$

$$q_5 = 1 - q_3 = 0{,}333.$$

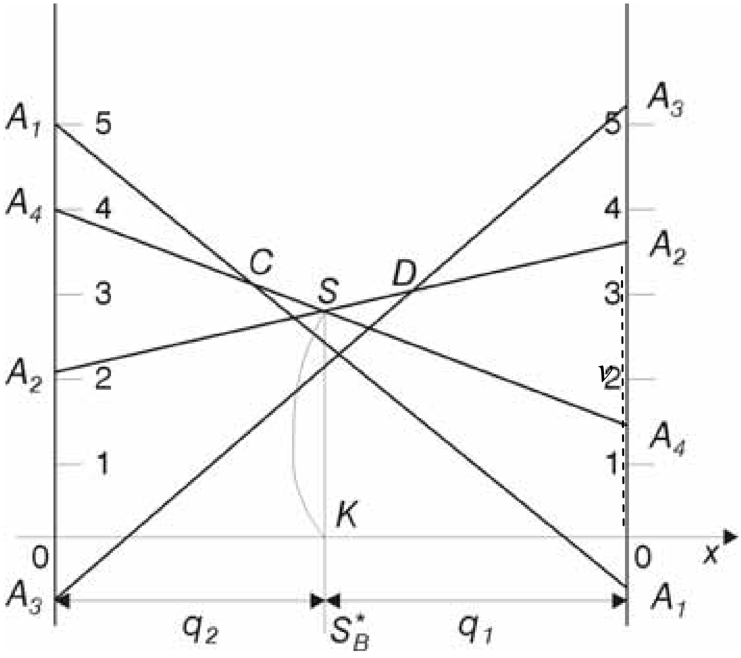
Išvada. Jei, nustačius aktyviąsias lošėjo B strategijas, norima tiksliai apskaičiuoti grynųjų strategijų taikymo tikimybes ir grynąją lošimo vertę, reikia pasinaudoti analitinėmis lošimo 2×2 formulėmis.

Nagrinėjant lošimą $m \times 2$, atliekami tokie pat veiksmai, bet kai kas keičiama. Lošėjai A ir B grafike sukeičiami vietomis, braižoma ne apatinė, o viršutinė lošimo vertė ir ieškomas tos vertės ne maksimumas, o minimumas. Nesigilinant į visas detales, pateikiamas brėžinys, atitinkantis mokesčių matricą, pateiktą 10 lentelėje, padedantis suprasti visų tų pakeitimų prasmę ir uždavinio sprendimo tvarką (3 pav.). Brėžinyje viršutinės lošimo vertės laužtinę sudaro A_1CSDA_3. Taškas S yra sprendimo taškas, pagal kurį nustatomos lošėjo A aktyviosios strategijos (jos yra A_2 ir A_4), lošėjo B grynųjų strategijų taikymo tikimybės, grynoji lošimo vertė ir kiti parametrai.

10 lentelė. **Mokesčių matrica**

A_i	B_1	B_2	α_i
A_1	5	-0,8	-0,8
A_2	2,1	3,7	2,1
A_3	-1	5,2	-1
A_4	4	1,5	1,5
β_j	5	5,2	

Tokiu pat būdu galima pereiti prie lošimo 2 × 2 ir, taikant analitinį būdą, apskaičiuoti tikslias visų dydžių reikšmes.



3 pav. **Grafinis lošimo 4 x 2 sprendimo būdas**

Matome, kad lošimų $2 \times n$ ir $m \times 2$ uždaviniai sprendžiami gana paprastai. Juos nesunku išspręsti sudarius atitinkamą modelį ir pasitelkus kompiuterius.

Kiek sudėtingiau sprendžiami lošimo $m \times n$ uždaviniai.

5.7. Lošimų $m \times n$ sprendimo metodai

Išnagrinėti paprasčiausi lošimų atvejai. Tačiau ne visada praktiniai uždaviniai gali būti taip supaprastinti. Reikia mokėti spręsti šiuos uždavinius ir esant bet kokiems m ir n. Tokie metodai yra žinomi. Pagrindiniai iš jų yra tiesinio programavimo ir iteracijų metodas. Išnagrinėsime juos.

5.7.1. Sprendimas taikant tiesinio programavimo metodą

Tarkime, nagrinėjamas $m \times n$ uždavinys su žinoma mokesčių matrica. Reikia rasti dvi optimaliąsias mišriąsias strategijas: po vieną kiekvienam lošėjui A ir B. Lošimai, turintys balno tašką, nenagrinėjami, nes tokie sprendimai lengvai randami taikant minimakso principą, o tai daroma prieš ieškant mišriųjų strategijų sprendimo.

Formuluojame lošimo uždavinį taip, kad rastume lošėjo A optimaliąją strategiją $S^*_A = (p_1, \ p_2, \ \dots , \ p_m)$, t. y. kad apskaičiuotume kiekvienos mūsų strategijos A_i taikymo tikimybes. Ši optimalioji mišrioji strategija turi suteikti galimybę lošėjui A išlošti ne mažiau grynosios vertės v, kurią irgi reikia apskaičiuoti.

Taikant tiesinio programavimo metodą reikia, kad būtų teisinga sąlyga, jog $v > 0$. Kadangi mokesčių matrica gali turėti ir neigiamų elementų, tai grynoji lošimo vertė taip pat gali būti neigiama. Bet šį trūkumą nesunku pašalinti. Įrodyta, kad parinkus bet kurį gana didelį teigiamą skaičių (jis gali būti lygus mažiausiam mokesčių matricos elementui), pvz., R, ir pridėjus jį prie kiekvieno mokesčių matricos elemento, gaunama nauja matrica, kuria naudojantis apskaičiuojamos visos strategijų p_i tikimybės (jos nuo tos operacijos nesikeičia), o grynoji lošimo vertė yra $v + R$. Atlikę tokią mokesčių matricos transformaciją įvykdysime sąlygą, kad $v' > 0$.

Tarkime, lošėjas A taiko optimaliąją mišriąją strategiją, o lošėjas B – bet kurią grynąją strategiją B_j. Šiuo atveju lošėjo A vidutinis išlošis

$$a_j = p_1 a_{1j} + p_2 a_{2j} + \dots + p_m a_{mj} \ , \ j = 1, 2, \dots, n.$$

Kadangi optimalioji mišrioji lošėjo A strategija, kad ir kokios būtų lošėjo B pasirinktos strategijos, suteikia galimybę lošėjui A išlošti ne mažiau kaip v, vadinasi, yra teisingos nelygybės

$$\begin{cases} p_1 a_{11} + p_2 a_{21} + \ldots + p_m a_{m1} \geq v', \\ p_1 a_{12} + p_2 a_{22} + \ldots + p_m a_{m2} \geq v', \\ ------------------ \\ p_1 a_{1n} + p_2 a_{2n} + \ldots + p_m a_{mn} \geq v'. \end{cases} \quad (15)$$

Kiekvieną (15) formulės nelygybę padalysime iš v' ($v' > 0$) ir pažymėsime

$$x_1 = \frac{p_1}{v'}, \quad x_2 = \frac{p_2}{v'}, \ldots, \quad x_n = \frac{p_n}{v'}. \quad (16)$$

Tuomet nelygybes (15) galima parašyti taip:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \ldots + a_{m1} x_m \geq 1, \\ a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{m2} x_m \geq 1, \\ ------------------ \\ a_{1n} x_1 + a_{2n} x_2 + \ldots + a_{mn} x_m \geq 1. \end{cases} \quad (17)$$

Šiose nelygybėse kintamieji x_1, x_2 ... , x_m yra neneigiami. Kadangi $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$, tai teisinga lygybė

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \frac{1}{v'}. \quad (18)$$

Ja naudojantis ir žinant tikimybes p_i, nustatoma grynoji lošimo vertė.

(17) lygčių sistema nustato ribines tiesinio programavimo uždavinio sąlygas, t. y. galimų sprendinių sritį.

Lošėjas A stengiasi išlošti kiek galima daugiau, todėl jis siekia minimizuoti tikslo funkciją L, t. y. maksimizuoti grynąją lošimo vertę v':

$$L = x_1 + x_2 + \ldots + x_m. \quad (19)$$

Taigi lošėjo A optimaliosios mišriosios strategijos paieška susijusi su tiesinio programavimo uždavinio sprendimu taikant (17), (18) ir (19) formules.

Formuluojame tiesinio programavimo uždavinį, kad rastume lošėjo *B* optimaliąją mišriąją strategiją. Samprotaudami taip pat, kaip ir sudarydami nelygybes (15), galime parašyti:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \le 1, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \le 1, \\ ------------------ \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le 1; \end{cases} \tag{20}$$

čia $y_1 = q_1 / v'$; $y_2 = q_2 / v'$; ...; $y_n = q_n / v'$. (21)

Matyt, reikia taip parinkti kintamuosius $y_1,\ y_2 \ldots,\ y_n$, kad būtų maksimizuota tikslo funkcija

$$L' = y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \frac{1}{v'}. \tag{22}$$

Taigi bet kurio $m \times n$ lošimo sprendimas gali būti rastas taikant bet kurį iš tiesinio programavimo uždavinio sprendimo metodų.

Kadangi lošimą pasisekė suformuluoti kaip tiesinio programavimo uždavinį, tai taikant to metodo išvadas įrodyta, kad lošimas visada turi sprendimą, t. y. egzistuoja optimalioji mišrioji strategija.

Uždavinys 5.7. Reikia rasti 5.2 uždavinio lošėjų *A* ir *B* optimaliąsias mišriąsias strategijas, taikant tiesinio programavimo metodą.

*Sprendimas***.** Žinoma mokesčių matrica (11 lent.). Šio uždavinio sprendimas rastas taikant minimakso principą. Kadangi apatinė lošimo vertė $\alpha = -0{,}05$ nelygi viršutinei lošimo vertei $\beta = 0{,}23$, uždavinio sprendimas yra mišriųjų strategijų srityje.

Šį uždavinį sprendžiame tiesinio programavimo metodu.

11 lentelė. **Pradinė mokesčių matrica**

A_i	B_j			α_i
	B_1	B_2	B_3	
A_1	0,23	0,09	–0,05	–0,05
A_2	–0,1	0,35	0,25	–0,1
A_3	–0,1	–0,3	0,55	–0,3
β_j	0,23	0,35	0,55	

Matome, kad mokesčių matricoje yra neigiamų elementų, mažiausias iš jų yra –0,3, todėl parenkame R = 0,3 ir pridedame tą reikšmę prie kiekvieno pradinės matricos elemento. Gauname naują matricą, kurios kiekvienas elementas yra a_{ij} + 0,3 (12 lent.).

12 lentelė. **Nauja mokesčių matrica (a_{ij}+R)**

A_i	B_j		
	B_1	B_2	B_3
A_1	0,53	0,39	0,25
A_2	0,2	0,65	0,55
A_3	0,2	0	0,85

Ieškome lošėjo A optimaliosios mišriosios strategijos.
Formuluojame tiesinio programavimo uždavinį.
Reikia minimizuoti tikslo funkciją

$$L = x_1 + x_2 + x_3; \quad x_1 = \frac{p_1}{v'}, \quad x_2 = \frac{p_2}{v'}, \quad x_3 = \frac{p_3}{v'},$$

esant tokioms ribinėms sąlygoms:

$$0{,}53x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}2x_3 \geq 1,$$
$$0{,}39x_1 + 0{,}65x_2 + 0 \cdot x_3 \geq 1,$$
$$0{,}25x_1 + 0{,}55x_2 + 0{,}85x_3 \geq 1.$$

Įrašę papildomus kintamuosius y_1, y_2, y_3, pereiname nuo nelygybių prie lygybių:

$$y_1 = -1 - (-0{,}53x_1 - 0{,}2x_2 - 0{,}2x_3),$$
$$y_2 = -1 - (-0{,}39x_1 - 0{,}65x_2),$$
$$y_3 = -1 - (-0{,}25x_1 - 0{,}55x_2 - 0{,}85x_3).$$

Taikome simpleksų metodą. Sudarome simpleksų lenteles (13 ir 14).

13 lentelė. **Pirma simpleksų lentelė**

$\updownarrow y_3$

	Laisvasis narys	x_1	x_2	x_3
y_1	–1	–0,53	–0,2	–0,2
y_2	–1	–0,39	–0,65	0
$x_3 \leftrightarrow$ y_3	–1	–0,25	–0,55	**–0,85**

Kadangi visi laisvieji nariai yra neigiami, atraminio sprendimo negalima rasti, jei visi $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Nustatytu būdu ieškome atraminio sprendimo. Kadangi visi laisvieji nariai yra neigiami, tai galima pasirinkti bet kurį bazinį kintamąjį y_i ir pakeisti jį laisvuoju kintamuoju. Tarkime, pasirinktas kintamasis y_3. Šioje eilutėje pasirenkame bet kurį elementą, kuris turi tą patį ženklą kaip ir jo laisvasis narys. Kadangi visi jie atitinka šį reikalavimą, tai pasirenkame bet kurį, tarkime, –0,85. Taip pasirenkamas stulpelis x_3 (13 lent.). Šiame stulpelyje atliekame tokius veiksmus: laisvasis narys dalijamas iš atitinkamoje eilutėje esančio elemento ir keisti pasirenkama ta kintamųjų pora, kurios šis santykis yra mažiausias (būtina sąlyga: elementas ir laisvasis narys turi turėti vienodus ženklus; nulis nenagrinėjamas). „Kandidatų“ į pakeitimus santykiai:

$$\frac{-1}{-0,2} = 5, \quad \frac{-1}{-0,85} = 1,18.$$

Mažiausias iš jų yra 1,18, todėl bazinis kintamasis y_3 turi būti keičiamas laisvuoju kintamuoju x_3. Pažymime eilutę y_3 ir stulpelį x_3 specialiais ženklais. Keičiame vietomis x_3 ir y_3, t. y. atliekame operaciją $x_3 \longleftrightarrow y_3$. Norint tai padaryti, reikia (13 ir 14 lent.):

1. Sprendžiamąjį 13 lentelės elementą (y_3x_3) pakeisti atvirkštiniu dydžiu 14 lentelėje, t. y. $\frac{1}{-0,85} = -1,18.$

2. Visus kitus sprendžiamosios eilutės elementus dalyti iš sprendžiamojo elemento (–0,85).

3. Visų sprendžiamųjų stulpelių elementų (išskyrus sprendžiamąjį elementą) ženklus pakeisti priešingais ir padalyti tą dydį iš sprendžiamojo elemento.

4. Kiekvienas iš likusių elementų apdorojamas taip (pavyzdys – transformuojamas 13 lent. elementas –0,53):

4.1. 12 lentelės sprendžiamojoje eilutėje išskiriamas elementas, esantis tame pačiame stulpelyje (–0,25);

4.2. 13 lentelės sprendžiamajame stulpelyje išskiriamas elementas, esantis toje pačioje eilutėje (–0,235);

4.3. 4.1 ir 4.2 punktuose išskirti skaičiai padauginami:

(–0,25) · (–0,235) = 0,05875;

4.4. 4.3 punkte gautas rezultatas pridedamas prie nagrinėjamo langelio reikšmės (–0,53 + 0,05875 = –0,47125); šis rezultatas (–0,47125) įrašomas naujoje eilutėje.

Skaičiuojame naują mokesčių matricos elementą y_2x_1 (13 lent.).

Jis nustatomas taip: –0,39 + (–0,25) · 0 = –0,39.

Skaičiuojame elementą y_1x_2 : –0,2 + (–0,55)(–0,235) = –0,07075.

Atlikę šiuos veiksmus, gauname naują 14 lentelę.

14 lentelė. **Antra simpleksų lentelė**

y_2 ↕

	Laisvasis narys	x_1	x_2	y_3
y_1	–0,765	–0,471	–0,071	–0,235
x_2 ↔ y_2	–1	–0,39	**–0,65**	0
x_3	1,18	0,294	0,647	–1,18

Kadangi 14 lentelėje dar du laisvieji nariai yra neigiami, atraminis sprendimas nerastas.

Kitam bazinio ir laisvojo kintamojo pakeitimo ciklui pasirenkame bazinį kintamąjį y_2 (14 lent.).

Eilutėje y_2 yra du elementai, turintys tą patį ženklą kaip ir laisvasis narys. Keitimo ciklui pasirenkame bet kurį iš jų, pvz., –0,65. Skaičiuojame „kandidatų“ į pakeitimus santykius:

$$\frac{-0{,}765}{-0{,}071} = 10{,}8 \quad \text{ir} \quad \frac{-1}{-0{,}65} = 1{,}54\,.$$

Kadangi iš jų mažesnis yra antrasis, keičiame y_2 į x_2 .

14 lentelėje išskiriame sprendžiamąjį elementą (–0,65) ir pažymime sprendžiamąją eilutę bei stulpelį. Taip pat apskaičiuojame ir 14 lentelės (simpleksų) elementus.

15 lentelė. **Trečia simpleksų lentelė**

x_2

	Laisvasis narys	x_1	y_2	y_3
y_1	–0,656	–0,428	–0,109	–0,235
x_2	1,54	**0,6**	–1,54	0
x_3	0,18	–0,1	1	–1,18

x_1

16 lentelė. **Ketvirta simpleksų lentelė**

	Laisvasis narys	x_2	y_2	y_3
y_1	0,444	0,715	–1,209	–0,235
x_1	2,57	1,67	–2,57	0
x_3	0,426	0,157	0,758	–1,18

15 lentelėje vienas laisvasis narys yra neigiamas, todėl atraminis sprendimas dar nerastas.

Nagrinėjame eilutę y_1. Kadangi visi koeficientai šioje eilutėje yra neigiami, tai keitimo ciklui gali būti parenkamas bet kuris laisvasis kintamasis. Tarkime, parinkome kintamąjį x_1. Sprendžiamasis elementas yra 0,6, kintamuosius x_2 ir x_1 reikia sukeisti vietomis. Naujoje simpleksų 16 lentelėje visi laisvieji nariai yra teigiami, todėl randamas atraminis sprendimas:

$$x_2 = y_2 = y_3 = 0,\ \ y_1 = 0{,}444,\ \ x_1 = 2{,}57,\ \ x_3 = 0{,}426.$$

Nauji baziniai kintamieji išreiškiami laisvaisiais kintamaisiais taip:

$$\begin{cases} y_1 = 0{,}444 - 0{,}715x_2 + 1{,}209y_2 + 0{,}235y_3, \\ x_1 = 2{,}57 - 1{,}67x_2 + 2{,}57y_2, \\ x_3 = 0{,}426 - 0{,}157x_2 - 0{,}758y_2 + 1{,}18y_3. \end{cases}$$

Reikia nustatyti, ar šis atraminis sprendimas yra optimalusis, jei ne – rasti tą optimalų sprendimą.

Pasinaudodami 15 lentele, tikslo funkciją išreiškiame naujais laisvaisiais kintamaisiais:

$$L = x_1 + x_2 + x_3 = 2{,}57 - 1{,}67x_2 + 2{,}57y_2 + x_2 + 0{,}426 -$$
$$- 0{,}157x_2 - 0{,}758y_2 - 1{,}18y_3 = 3 - 0{,}827x_2 + 1{,}81y_2 + 1{,}18y_3 .$$

Šią tikslo funkciją reikia minimizuoti.

Matome, kad atraminis sprendimas nėra optimalusis, nes laisvojo kintamojo x_2 koeficientas yra neigiamas. Vadinasi, didinant tą kintamąjį galima sumažinti tikslo funkciją.

Taikydami simpleksų metodą, ieškome optimaliojo sprendimo.

Uždavinys formuluojamas taip: minimizuoti tikslo funkciją

$$L = -3 - 0{,}827x_2 + 1{,}81y_2 + 1{,}18y_3, \tag{23}$$

esant tokioms ribinėms sąlygoms:

$$\begin{cases} y_1 = 0{,}444 - 0{,}715x_2 + 1{,}209y_2 + 0{,}235y_3, \\ x_1 = 2{,}57 - 1{,}67x_2 + 2{,}57y_2, \\ x_3 = 0{,}426 - 0{,}157x_2 - 0{,}758y_2 + 1{,}18y_3. \end{cases} \tag{24}$$

Didiname x_2. Tai galima daryti tol, kol y_1, x_1 arba x_3 nepasidarys neigiami. Kadangi $y_2 = y_3 = 0$, tai iš (24) lygčių sistemos nustatome, kokią reikšmę gali turėti x_2:

$0{,}715x_2 = 0{,}444$, $x_2 = 0{,}621$, $1{,}67x_2 = 2{,}57$, $x_2 = 1{,}54$,
$0{,}157x_2 = 0{,}426$, $x_2 = 2{,}71$.

Vadinasi, $x_2 = 0{,}621$ (minimali reikšmė iš 0,621; 1,54 ir 2,71), todėl kintamuosius x_2 ir y_1 reikia sukeisti vietomis. Tam visos (24) formulės lygtys išreiškiamos naujais laisvaisiais kintamaisiais (y_1, y_2, y_3). Gauname naują tiesinio programavimo uždavinį: minimizuoti tikslo funkciją

$$L = 2{,}49 + 1{,}16y_1 + 0{,}41y_2 + 0{,}02y_3,$$

esant tokioms ribinėms sąlygoms:

$$\begin{cases} x_1 = 1{,}53 - 2{,}34y_1 - 0{,}25y_2 - 2{,}34y_3, \\ x_2 = 0{,}621 - 1{,}4y_1 + 1{,}69y_2 + 1{,}4y_3, \\ x_3 = 0{,}329 + 0{,}22y_1 - 1{,}023y_2 + 0{,}96y_3. \end{cases} \tag{25}$$

Šio uždavinio sprendimas yra taške, kuriame visi laisvieji kintamieji yra lygūs nuliui, t. y. $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, o baziniai kintamieji $x_1 = 1{,}53$, $x_2 = 0{,}621$, $x_3 = 0{,}329$.

Tikslo funkcija $L = 2{,}49$ ir tai yra minimali jos reikšmė (L_{min}).

Šis sprendimas yra optimalusis, nes visų laisvųjų kintamųjų koeficientai tikslo funkcijoje yra teigiami.

Pagal (18) formulę nustatome grynąją lošimo vertę:

$$L = \frac{1}{v'}, \quad v' = \frac{1}{L_{\min}} = \frac{1}{2{,}49} = 0{,}4016;$$

čia v' – nauja grynoji lošimo vertė, kuri buvo gauta prie kiekvieno mokesčių matricos elemento pridėjus 0,3.

Vadinasi, grynoji lošimo vertė

$v = v' - 0{,}3 = 0{,}4016 - 0{,}3 = 0{,}1016.$

Pagal (16) formulę apskaičiuojame lošėjo A strategijų taikymo tikimybes:

$p_1 = x_1 v' = 1{,}53 \cdot 0{,}4016 = 0{,}62,$

$p_2 = x_2 v' = 0{,}621 \cdot 0{,}4016 = 0{,}25,$

$p_3 = x_3 v' = 0{,}329 \cdot 0{,}4016 = 0{,}13.$

Tikriname, ar $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, $0{,}62 + 0{,}25 + 0{,}13 = 1$. Vadinasi, tikimybės apskaičiuotos teisingai.

Išvados:

1. Lošėjo A optimalioji mišrioji strategija yra $S^*_A = (0{,}62; 0{,}25; 0{,}13)$, t. y. jis turi taikyti strategiją A_1 – 62 proc., A_2 – 25 proc. ir A_3 – 13 proc. visų atvejų.

2. Taikydamas šią optimaliąją mišriąją strategiją, lošėjas A išlošia 0,102. Ši reikšmė nedaug skiriasi nuo vidutinės lošimo vertės, kuri yra:

$$\frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{0{,}23 + 0{,}05}{2} = 0{,}14.$$

3. Jei lošėjas A taiko savo minimaksinę strategiją, tai jis išlošia –0,05 (tiksliau, pralošia 0,05). Pastebime, kad išlošis taikant mišriąją optimaliąją strategiją, palyginti su minimaksine, padidėjo 0,152. Vadinasi, šią mišrią strategiją taikyti verta.

4. Sugrįžę prie 5.2 uždavinio sąlygų matome, kad naikinti lėktuvą tolimiausiame taške a_1 tikslinga beveik dviem atvejais iš trijų. Naikinimo zonos viduryje (taške a_2) reikia apšaudyti lėktuvą vieną kartą iš keturių. Vidutiniškai vieną kartą iš aštuonių tikslinga atakuoti lėktuvą artimiausiame taške a_1. Tokios rekomendacijos gali būti išdėstytos šaudymo taisyklėse.

5. Formuluodami kitas konfliktines situacijas ir rasdami atitinkamus sprendimus, galime sudaryti šaudymo taisyklių ir pagrįstų rekomendacijų sąrašą. Be to, gali būti sudaryti kiekvienos situacijos modeliai, kuriais naudojantis būtų vertinami visi sprendimo variantai ir laiku pateikiamos apskaičiuotos praktinės rekomendacijos. Tuo atveju atliekamos ir visos reikiamos atsitiktinių dydžių imitavimo procedūros, o tai padaryti vartotojui nelengva dėl laiko stokos. Be to, išvengiama psichologinių sunkumų, susijusių su atsitiktinių dydžių mechanizmo taikymu pasirenkant konkretų sprendimą.

Tokiu pat būdu sužinoma ir lošėjo B optimalioji mišrioji strategija. Visus reikiamus veiksmus skaitytojas gali atlikti savarankiškai.

Matome, kad tiesinio programavimo metodo taikymas yra susijęs su gana ilgais skaičiavimais. Žinoma, dirbant kompiuteriais tai neturi didelės reikšmės. Tačiau yra ir kitų tokių uždavinių sprendimo metodų. Vienas iš jų yra vadinamasis iteracinis metodas.

5.7.2. Lošimo uždavinių sprendimas iteraciniu metodu

Šis metodas paprastai taikomas tada, kai tikslus sprendinys nebūtinas. Jo prasmė yra tokia. Atliekamas teorinis eksperimentas, t. y. be realių veiksmų. Tarkime, lošėjas A atsitiktiniu būdu pasirenka vieną iš savo strategijų A_i . Kitas lošėjas B daro tokį ėjimą, kuris mažiausiai naudingas lošėjui A. Lošėjas A, žinodamas konkrečią lošėjo B strategiją, savo ruožtu pasirenka tokią strategiją, kuri leidžia išlošti daugiausia. Dabar lošėjas B žino du lošėjo A ėjimus. Įvertinęs pirmąsias dvi lošėjo A pasirinktas strategijas, jis atsako tokia strategija, kuri minimizuoja lošėjo A vidutinį išlošį.

Iteracijos metu kiekvienas lošėjas, įvertinęs visus kito lošėjo ėjimus, į kitą priešininko ėjimą atsako optimaliąja strategija. Padaryti ėjimai sudaro kokią nors mišriąją strategiją, sudarytą iš grynųjų strategijų su jų panaudojimo dažniais.

Įrodyta, kad ši procedūra yra konverguojančioji seka. Vidutinė lošimo vertė, gauta iteraciniu metodu (v^*), artėja prie grynosios lošimo vertės, o lošėjų strategijų taikymo tikimybės p^*_1 , $p^*_2, \ldots, p^*_m$ ir $q^*_1, q^*_2, \ldots, q^*_n$ artėja prie tikslių jų reikšmių p_1 , $p_2, \ldots, p_m$ ir $q_1,\ q_2\ ,\ \ldots,\ q_n$.

Iteracinio metodo veiksmų sudėtingumas labai priklauso nuo m ir n dydžių, o taikant tiesinio programavimo metodą uždavinys sprendžiamas paprasčiau.

Parodysime, kaip taikomas iteracinis metodas sprendžiant praktinį uždavinį.

U ž d a v i n y s 5.8. Reikia rasti uždavinio, kurio mokesčių matrica pateikta 17 lentelėje, optimaliąsias mišriąsias lošėjų A ir B strategijas ir grynąją lošimo vertę, taikant iteracinį metodą. Žinomas tikslus to uždavinio sprendinys. Jis yra toks:

$$S_A = (0{,}5;\ 0{,}5),\ S_B = (0{,}67;\ 0{,}33),\ v = 2.$$

Vadinasi, bus galimybė palyginti iteraciniu metodu gautus sprendinius su tiksliomis jų reikšmėmis.

17 lentelė. **Mokesčių matrica**

	B_1	B_2
A_1	4	0
A_2	0	5

*Sprendimas***.** Parengiame iteracijų reikšmių lentelę. Pirmame stulpelyje pažymime iteracijos numerį k (abu lošėjai pasirenka po vieną strategiją). Antrame stulpelyje parodome lošėjo A pasirinktos strategijos numerį i. Kituose dviejuose stulpeliuose rašome suminius išlošius, kurie buvo gauti abiem lošėjams taikant savo konkrečias strategijas per pirmąsias k iteracijas. Minimalius suminius išlošius pabraukiame. Pabrėžtas išlošis nustato geriausią lošėjo B strategiją j. Paskui dviejuose stulpeliuose surašome suminius išlošius, kurie buvo gauti per pirmąsias k iteracijas, taikant strategijas A_i. Maksimalią A_i reikšmę pabraukiame. Pabrauktos strategijos numeris nustato kitos iteracijos i numerį.

Stulpelyje $\underline{v}$ surašome minimalius suminius išlošius, padalytus iš k; stulpelyje $\overline{v}$ – maksimalius suminius išlošius, padalytus iš k, stulpelyje v^* – grynąsias lošimo vertes, apskaičiuotas pagal formulę

$$v* = \frac{\underline{v} + \overline{v}}{2}.$$

Apskaičiavę, kiek kartų buvo taikyta kiekviena strategija, ir gautą skaičių padaliję iš atliktų iteracijų skaičiaus, gauname grynųjų strategijų taikymo tikimybes.

Remdamiesi šia teorija pildome 18 lentelę.

Tarkime, lošėjas A pradeda veiksmus pasirinkdamas antrąją strategiją. Antrame stulpelyje rašome 2; stulpeliuose B_j rašome reikšmes, paimtas iš 17 lentelės: 0; 5. Minimalią 0 reikšmę pabraukiame. Vadinasi, lošėjas B

taikys pirmą strategiją, todėl stulpelyje j rašome vienetą. Iš 17 lentelės išrašome antro stulpelio reikšmes: 4; 0. Didžiausia iš jų yra 4. Šią reikšmę pažymime brūkšneliu iš viršaus. Kadangi ši reikšmė atitinka pirmą strategiją, tai kitoje iteracijoje, stulpelyje i, rašome vienetą. Pirmos eilutės stulpeliuose rašome: $\underline{v} = 0$, $v^* = 2$, $\overline{v} = 4$.

Antroje iteracijoje jau parinkta pirma strategija. Jos reikšmes pridedame prie esamų pirmoje eilutėje. Gauname: 4; 5. Minimali reikšmė yra 4. Pabraukiame ją. Kadangi ji atitinka strategiją B_1, stulpelyje j rašome 1. Iš mokesčių matricos imame pirmą stulpelį ir jo reikšmes pridedame prie esamų pirmoje eilutėje. Gauname: 8; 0. Maksimalią reikšmę (8) pabraukiame iš viršaus. Kadangi ji atitinka strategiją A_1, tai trečioje eilutėje stulpelyje i rašome vienetą. Stulpeliuose $\underline{v}$ ir $\overline{v}$ rašome toje eilutėje pabrėžtas reikšmes, prieš tai padalijęs jas iš 2 ($k = 2$) : 2;4, $v^* = 3$.

Taip užpildoma visa lentelė. Joje yra 10 iteracijų. Ieškome lošėjo A optimaliosios mišriosios strategijos. Tam reikia apskaičiuoti, kiek kartų buvo taikyta kiekviena strategija A_i, ir gautą skaičių padalyti iš iteracijų skaičiaus. Strategija A_1 buvo taikyta 5 kartus, A_2 – 5 kartus, todėl lošėjo A optimalioji mišrioji strategija

$$S_A^* = \left(\frac{5}{10}; \frac{5}{10}\right) = (0{,}5;\, 0{,}5).$$

Grynoji lošimo vertė $v^* = 2{,}5$.

Lošėjo B optimalioji mišrioji strategija

$$S_B^* = \left(\frac{5}{10}; \frac{5}{10}\right) = (0{,}5;\, 0{,}5).$$

18 lentelė. **Iteracijų reikšmės**

k	i	B_1	B_2	j	A_1	A_2	$\underline{v}$	v^*	$\overline{v}$
1	2	0	5	1	4	0	0	2	4
2	1	4	5	1	8	0	2	3	4
3	1	8	5	2	8	5	5/3	13/6	8/3
4	1	12	5	2	8	10	5/4	15/8	10/4
5	2	12	10	2	8	15	2	2,5	3
6	2	12	15	1	12	15	2	2,5	3
7	2	12	20	1	16	15	12/7	29/14	16/7
8	1	16	20	1	20	15	16/8	36/16	20/8
9	1	20	20	2	20	20	20/9	20/9	20/9
10	2	20	25	2	20	25	2,5	2,5	2,5

Išvados:

1. Žaidėjas A turi taikyti pirmąją ir antrąją strategijas su vienodomis tikimybėmis 0,5. Šis sprendinys sutampa su tiksliu sprendiniu.
2. Žaidėjas B irgi turi taikyti pirmąją ir antrąją strategijas su vienodomis tikimybėmis 0,5. Šis sprendinys nesutampa su tiksliu sprendiniu. Tikslus sprendinys yra toks: pirmąją strategiją reikia taikyti su tikimybe 2/3, antrąją – su tikimybe 1/3.
3. Grynoji lošimo vertė yra 2,5. Tiksli grynosios lošimo vertės reikšmė yra 2.
4. Gauti skirtumai atsirado dėl per mažo iteracijų kiekio. Jų turi būti ne mažiau kaip 30.

5.8. Lošimo uždavinių sprendimas Excel aplinkoje

5.8.1. Sprendimas taikant tiesinio programavimo metodą

Tarkime, nagrinėjamas m x n uždavinys su žinoma mokesčių matrica.

Ši matrica gali būti redukuota, tačiau ir neatlikus redukavimo procedūros bus rastas toks pat sprendimas.

Reikia rasti dvi optimaliąsias mišriąsias strategijas: po vieną kiekvienam žaidėjui A ir B.

Formuluojame lošimų uždavinį taip, kad rastume žaidėjo A optimaliąją strategiją $S^*_A = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, t. y. apskaičiuotume kiekvienos strategijos A_i pritaikymo tikimybes.

Ši optimalioji mišrioji strategija turi suteikti galimybę žaidėjui A išlošti ne mažiau grynosios lošimo vertės v, kurią irgi reikia apskaičiuoti.

Taikant tiesinio programavimo metodą, reikia, kad būtų teisinga sąlyga $v > 0$.

Kadangi mokesčių matrica gali turėti ir neigiamų elementų, tai grynoji lošimo vertė taip pat gali būti neigiama. Bet šį trūkumą nesunku pašalinti.

Įrodyta, kad parinkus bet kokį gana didelį teigiamą skaičių (jis gali būti lygus mažiausiam mokesčių matricos elementui, pvz., R), ir pridėję jį prie kiekvieno matricos elemento, gausime naują matricą, kurią panaudoję rasime visas strategijų tikimybes (jos nuo tos operacijos nesikeičia), o grynoji lošimo vertė bus $v + R = v'$.

Atlikę tokią mokesčių matricos transformaciją, įvykdysime sąlygą, kad $\nu' > 0$.

Tarkime, kad žaidėjas A taiko savo optimaliąją mišriąją strategiją, o žaidėjas B – bet kurią savo grynąją strategiją. Šiuo atveju žaidėjo vidutinis išlošis apskaičiuojamas pagal formulę

$$a_j = p_1 a_{1j} + p_2 a_{2j} + \ldots + p_m a_{mj}, \ldots\ j = 1,\ 2,\ \ldots, n.$$

Kadangi optimalioji mišrioji žaidėjo A strategija, kad ir kokios būtų žaidėjo B pasirinktos strategijos, suteikia galimybę žaidėjui A išlošti ne mažiau kaip grynoji lošimo vertė, vadinasi, yra teisingos nelygybės

$$\begin{aligned} &p_1 a_{11} + p_2 a_{21} + \ldots + p_m a_{m1} \geq \nu', \\ &p_1 a_{12} + p_2 a_{22} + \ldots + p_m a_{m2} \geq \nu', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &p_1 a_{1n} + p_2 a_{2n} + \ldots + p_m a_{mn} \geq \nu'. \end{aligned} \qquad (26)$$

Pažymime

$$x_1 = \frac{p_1}{\nu'}\ x_2 = \frac{p_{2\tilde{}}}{\nu'},\ \ldots,\ x_n = \frac{p_{n1}}{\nu'}. \qquad (27)$$

Šiuo atveju nelygybės (26) gali būti užrašytos taip:

$$\begin{aligned} &x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + \ldots + x_m a_{m1} \geq 1, \\ &x_1 a_{12} + x_2 a_{22} + \ldots + x_m a_{m2} \geq 1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_1 a_{1n} + x_2 a_{2n} + \ldots + x_m a_{mn} \geq 1. \end{aligned} \qquad (28)$$

Šiose nelygybėse visi kintamieji yra neneigiami ir, kadangi $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$, tai teisinga lygybė

$$L = x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \frac{1}{\nu}. \qquad (29)$$

Ją taikant randama grynoji lošimo vertė, žinant tikimybes p_i.

Formulės (28) nustato ribines tiesinio programavimo uždavinio sąlygas, t. y. galimų sprendinių sritį.

Žaidėjas A stengiasi išlošti kuo daugiau, todėl jis siekia minimizuoti funkciją L, t. y. maksimizuoti grynąją lošimo vertę ν'

$$L = x_1 + x_2 + \ldots + x_m. \qquad (30)$$

Taigi žaidėjo A optimaliosios mišriosios strategijos paieška susijusi su tiesinio programavimo uždavinio sprendimu taikant (28), (29) ir (30) formules.

Formuluojame tiesinio programavimo uždavinį, norėdami rasti žaidėjo B optimaliąją mišriąją strategiją. Samprotaudami taip pat, kaip sudarydami nelygybes (26), galime parašyti:

$$\begin{aligned} &y_1 a_{11} + y_2 a_{12} + \ldots + y_n a_{1n} \le 1, \\ &y_1 a_{21} + y_2 a_{22} + \ldots + y_n a_{2n} \le 1, \\ &y_1 a_{m1} + y_2 a_{m2} + \ldots + y_n a_{mn} \le 1, \end{aligned} \qquad (31)$$

čia $y_1 = \dfrac{q_1}{v'}, \; y_2 = \dfrac{q_1}{v'}, \ldots, \;\; y_n = \dfrac{q_n}{v'}.$ (32)

Matyt, reikia taip pasirinkti šiuos kintamuosius, kad būtų maksimizuota tikslo funkcija

$$L = y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \frac{1}{v'}. \qquad (33)$$

Taigi bet kokio m x n lošimo sprendimas gali būti rastas taikant gerai išvystytą bet kurį tiesinio programavimo uždavinio sprendimo metodą.

Kadangi pasisekė lošimą suformuluoti kaip tiesinio programavimo uždavinį, tai, taikant to metodo išvadas, įrodyta, kad lošimas visada turi sprendimą, t. y. egzistuoja optimalioji mišrioji bet kurio žaidėjo strategija.

Lošimo uždavinio sprendimą kompiuteriniu tiesinio programavimo metodu patogu nagrinėti sprendžiant konkretų uždavinį.

Uždavinys 5.7. Žinoma mokesčių matrica (3 × 3), pateikta 19 lentelėje. Reikia rasti optimalią žaidėjo A mišriąją strategiją.

*Sprendimas***.** Matome, kad mokesčių matricoje yra neigiamų elementų, mažiausias iš jų yra – 0,3, todėl pasirenkame R = 0,3 ir pridedame tą reikšmę prie kiekvieno pradinės matricos elemento.

Gauname naują matricą, kurios kiekvienas elementas yra a_{ij} + 0,3 (žr. 20 lentelę).

19 lentelė. **Pradinė mokesčių matrica**

A_i	B_j			α_i
	B_1	B_2	B_3	
A_1	0,23	0,09	–0,05	–0,05
A_2	–0,1	0,35	0,25	–0,1
A_3	–0,1	–0,3	0,55	–0,3
β_j	0,23	0,35	0,55	

20 lentelė. **Nauja mokesčių matrica**

A_i	B_j		
	B_1	B_2	B_3
A_1	0,53	0,39	0,25
A_2	0,2	0,65	0,55
A_3	0,2	0	0,85

Ieškome lošėjo A optimaliosios mišriosios strategijos.
Formuluojame tiesinio programavimo uždavinį.
Reikia minimizuoti tikslo funkciją

$$L = x_1 + x_2 + x_3,$$

čia $x_1 = \dfrac{p_1}{v'}$, $x_2 = \dfrac{p_2}{v'}$, $x_3 = \dfrac{p_3}{v'}$, $v = v' - R$,

esant tokioms ribinėms sąlygoms:

$$0{,}53x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}2x_3 \geq 1,$$

$$0{,}39x_1 + 0{,}65x_2 + 0x_3 \geq 1,$$

$$0{,}25x_1 + 0{,}55x_2 + 0{,}85x_3 \geq 1.$$

Gavome standartinį tiesinio programavimo uždavinį.

Norint tiksliai atlikti visus veiksmus, pageidautina juos suskirstyti į atskirus žingsnius.

1. Įjungiame Excel programą: Start; Microsoft Excel.
2. Pasirenkame langelius, kuriuose užrašomos kintamųjų x_1, x_2, x_3 reikšmės. Norint išvengti painiavos, tikslinga pasirinkti dvi langelių eiles. Pirmoje (viršutinėje) reikia užrašyti kintamųjų simbolius, antroje – jų reikšmes.

Tarkime, kintamųjų simbolius užrašysime langeliuose C1:E1, o jų reikšmes – langeliuose C2:E2, kaip tai parodyta 21 lentelėje. Pasirinktos pradinės kintamųjų reikšmės lygios nuliui.

21 lentelė. **Kintamųjų paskirstymas**

Nr.	C	D	E
1	x_1	x_2	x_3
2	0	0	0

3. Langeliuose C3:E5 užrašome ribinių sąlygų koeficientus, kaip tai parodyta 22 lentelėje.

22 lentelė. **Koeficientai prie kintamųjų ribinėmis sąlygomis**

Nr.	C	D	E
3	0,53	0,2	0,2
4	0,39	0,65	0
5	0,25	0,55	0,85

4. Langeliuose A3:A5 užrašome ribinių sąlygų laisvuosius narius (žr. 23 lentelę).
5. Langeliuose B3:B5 užrašome ribinių sąlygų apskaičiavimo formules, kaip tai parodyta 23 lentelėje.

23 lentelė. **Ribinių sąlygų laisvieji nariai (langeliai A3:A5) ir ribinių sąlygų apskaičiavimo formulės (langeliai B3:B5)**

Nr.	A	B
3	1	=C2*C3+D2*D3+E2*E3
4	1	=C2*C4+D2*D4+E2*E4
5	1	=C2*C5+D2*D5+E2*E5

Pastaba. Langeliuose B3:B5 turi pasirodyti nuliai, kai baigtas formulių rinkimas, nes visi kintamieji yra lygūs nuliui.

6. Langelyje G2 (arba bet kokiame kitame langelyje) užrašome tikslo funkcijos apskaičiavimo formulę:
=C2 +D2 +E2.
7. Visi reikiami duomenys įvesti. Pavedame kompiuteriui spręsti šį uždavinį.
Tam reikia:
8. Įjungti sprendimo režimą: Tools; Solver. Dialogo langelyje atlikti tokius veiksmus:
   a. Set Target Cell: G2 (žymeklį uždėti ant langelio G2).
   b. Pažymėti Min, nes norima minimizuoti tikslo funkciją.
   c. By Changing Cells: C2:E2 (nuoroda į visus kintamuosius).
   d. Add (nuorodos į ribines sąlygas):
   - Cell Reference: B3:B5 (nuorodos į ribinių sąlygų formules);

- >= 1 (visose ribinėse sąlygose yra ženklai daugiau arba lygu vienetui. Constraints: A3:A5 (nuorodos į ribinių sąlygų laisvuosius narius);
- OK.

e. Add (nuorodos, kad visi kintamieji turi būti neneigiami):

- Cell Reference: C2:E2;
- >= 0;
- OK.

9. Solve; Keep Solver Solution; OK.
10. Skaitome sprendimą:

$$L=2{,}475467,$$
$$x_1 = 1{,}53002,\ x_2 = 0{,}620449,\ x_3 = 0{,}324997.$$

Taikydami 29 formulę, randame $v' = \frac{1}{L} = \frac{1}{2{,}47547} = 0{,}404.$

Grynoji lošimo vertė $\nu = \nu' - R = 0{,}404 - 0{,}3 = 0{,}104$.

Šiuos ir kitus galutinius skaičiavimus taip pat verta pavesti kompiuteriui. Užrašome R reikšmę, tarkime, langelyje F3.

Langelyje H3 surenkame formulę =1/g3. Joje pamatysime reikšmę 0,404.

Langeliuose I3, J3, K3 surenkame formules =C2*H3, =D2*H3, E2*H3 atitinkamai ir pamatome dažnius, su kuriais reikia taikyti mūsų strategijas: pirmąją, antrąją ir trečiąją, t. y. $p_1 = 0{,}618$, $p_2 = 0{,}251$, $p_3 = 0{,}131$. Langelyje H4 (ar kitame laisvame) surenkame formulę = H3 – F3. Sužinome grynosios lošimo vertės reikšmę $-\nu = 0{,}103964$.

Išvada. Lošėjui A reikia taikyti savo pirmąją strategiją 62 proc. atvejų, antrąją – 25 proc. atvejų, trečiąją – 13 proc. atvejų. Tada jo išlošis būtų 0,104, o jei jis neieškotų šio uždavinio tikslaus sprendimo ir taikytų pirmąją savo strategiją, nes toks sprendimas išplauktų iš minimakso principo, jis pralooštų 0,05 sąlyginius vienetus.

Vadinasi, tikslus sprendimas, gautas taikant tiesinio programavimo metodą, padidina jo išloší 0,154 sąlyginiais vienetais. Ar verta ieškoti tikslaus sprendimo, priklauso nuo to, kas slypi po tais sąlyginiais vienetais.

Uždavinys 5.8. Galima išspręsti šį uždavinį ir už priešininką, t. y. nustatyti jo strategijų taikymo tikimybes.

Ieškome lošėjo B optimaliosios mišriosios strategijos.

Formuluojame tiesinio programavimo uždavinį.

Reikia maksimizuoti tikslo funkciją

$$L = y_1 + y_2 + y_3,$$

čia $y_1 = \frac{q_1}{v'}$, $y_2 = \frac{q_2}{v'}$, $y_3 = \frac{q_3}{v'}$, $v = v - R$,

esant tokioms ribinėms sąlygoms:

$$0{,}53y_1 + 0{,}39y_2 + 0{,}25y_3 \le 1,$$

$$0{,}2y_1 + 0{,}65y_2 + 0{,}55y_3 \le 1,$$

$$0{,}2y_1 + 0y_2 + 0{,}85y_3 \le 1\,.$$

Gavome standartinį tiesinio programavimo uždavinį.

Šiuo atveju reikia naudotis formulėmis (31)–(33), suvokiant, kad tikslo funkciją reikia ne minimizuoti, o maksimizuoti, visos ribinės sąlygos turi būti mažesnės ar lygios vienetui, kiekviena ribinė sąlyga sudaroma iš elementų, esančių vienoje eilutėje. Visi kiti veiksmai analogiški. Pokyčiai prasideda nuo 5 žingsnio.

1. Langeliuose B3:B5 užrašome ribinių sąlygų apskaičiavimo formules, kaip tai parodyta 24 lentelėje.

24 lentelė. **Ribinių sąlygų laisvieji nariai (langeliai A3:A5) ir ribinių sąlygų apskaičiavimo formulės (langeliai B3:B5)**

Nr.	A	B
3	1	=C2*C3+D2*C4+E2*C5
4	1	=C2*D3+D2*D4+E2*D5
5	1	=C2*E3+D2*E4+E2*F5

2. Langelyje G2 (arba bet kokiame kitame langelyje) užrašome tikslo funkcijos apskaičiavimo formulę: =C2 +D2 +E2.

3. Visi reikiami duomenys įvesti. Pavedame kompiuteriui spręsti šį uždavinį.

Tam reikia:

4. Įjungti sprendimo režimą: Tools; Solver. Dialogo langelyje reikia atlikti tokius veiksmus:

a. Set Target Cell: G2 (žymeklį uždėti ant langelio G2).

b. Pažymėti Max, nes norima maksimizuoti tikslo funkciją.

c. By Changing Cells: C2:E2 (nuoroda į visus kintamuosius).

d. Add (nuorodos į ribines sąlygas):

- Cell Reference: B3:B5 (nuorodos į ribinių sąlygų formules);

- =< 1 (visose ribinėse sąlygose yra ženklai mažiau arba lygu vienetui. Constraints: A3:A5 (nuorodos į ribinių sąlygų laisvuosius narius);
- OK.

e. Add (nuorodos, kad visi kintamieji turi būti neneigiami):

- Cell Reference: C2:E2;
- >=;
- 0;
- OK.

5. Solve; Keep Solver Solution; OK.

Sprendimas:

$$L=2{,}475467,$$
$$y_1 = 0{,}465473,\ y_2 = 0{,}168798,\ y_1 = 0{,}365729.$$

Taikydami 33 formulę, randame $\nu' = \frac{1}{L} = \frac{1}{2{,}47547} = 0{,}404.$

Grynoji lošimo vertė $\nu = \nu' - R$, t. y. 0,104. $\nu = \nu' - R = 0{,}404 - 0{,}104$.

Siūlau atkreipti dėmesį į tą faktą, kad 5.7 ir 5.8 uždavinyje grynoji lošimo vertė sutampa. Jei būtų kitaip, reikėtų ieškoti klaidos, nes nagrinėjamas lošimas su nuline suma, t. y. vienas išlošia tiek, kiek pralošia kitas lošėjas.

Išvada. Lošėjui B reikia taikyti savo pirmąją strategiją 47 proc. atvejų, antrąją – 17 proc. atvejų, trečiąją – 37 proc. atvejų. Tada jis praloštų 0,104, o jei neieškotų šio uždavinio tikslaus sprendimo ir taikytų pirmąją savo strategiją, nes toks sprendimas išplauktų iš minimakso principo, jis praloštų 0,23 sąlyginius vienetus.

Vadinasi, tikslus sprendimas, gautas taikant tiesinio programavimo metodą, sumažintų jo pralošimą 0,13 sąlyginių vienetų. Ar verta ieškoti tikslaus sprendimo, priklauso nuo to, kas slypi po tais sąlyginiais vienetais.

Uždavinys išspręstas.

Uždavinys 5.9. Žinoma mokesčių matrica (2 × 3), pateikta 25 lentelėje. Reikia rasti optimalią žaidėjo A mišriąją strategiją.

25 lentelė. **Mokesčių matrica**

A_1	B_1	B_2	B_3
A_1	1	0	4
A_2	2	6	1

Sprendimas. Formuluojame tiesinio programavimo uždavinį.
Reikia minimizuoti tikslo funkciją

$L = x_1 + x_2,$

čia $x_1 = \dfrac{p_1}{v}$, $x_2 = \dfrac{p_2}{v}$,

esant tokioms ribinėms sąlygoms:

$x_1 + 2x_2 \geq 1,$
$0\,x_1 + 6x_2 \geq 1,$
$4x_1 + x_2 \geq 1.$

Matome, kad turime du kintamuosius ir tris ribines sąlygas.

Būtina atkreipti dėmesį į tą faktą, kad kiekviena ribinė nelygybė sudaryta pasinaudojus stulpelyje, o ne eilutėje esančiais koeficientais!

Tai reiškia, kad suvedant duomenis į Excel langelius reikia eilutes išskirstyti į stulpelius.

Įjungiame Excel programą: Start; Microsoft Excel.

1. Pasirenkame langelius, kuriuose užrašomos kintamųjų x_1, x_2 reikšmės.

Tarkime, kintamųjų simbolius užrašysime langeliuose C1:D1, o jų reikšmes – langeliuose C2:D2, kaip tai parodyta 26 lentelėje. Pasirinktos pradinės kintamųjų reikšmės lygios nuliui.

26 lentelė. **Kintamųjų paskirstymas**

N.	C	D
1	x_1	x_2
2	0	0

2. Langeliuose C3:D5 užrašome ribinių sąlygų koeficientus, kaip tai parodyta 27 lentelėje.

27 lentelė. **Koeficientai prie kintamųjų ribinėse sąlygose**

Nr.	C	D
3	1	2
4	0	6
5	4	1

3. Langeliuose A3:A5 užrašome ribinių sąlygų laisvuosius narius (žr. 28 lentelę).

4. Langeliuose B3:B5 užrašome ribinių sąlygų apskaičiavimo formules, kaip tai parodyta 28 lentelėje.

28 lentelė. **Ribinių sąlygų laisvieji nariai (langeliai A3:A5) ir ribinių sąlygų apskaičiavimo formulės (langeliai B3:B5)**

Nr.	A	B
3	1	=C2*C3+D2*D3
4	1	=C2*C4+D2*D4
5	1	=C2*C5+D2*D5

Pastaba. Langeliuose B3:B5 turi pasirodyti nuliai, kai baigta rinkti formules, nes visi kintamieji yra lygūs nuliui.

5. Langelyje G2 (arba bet kokiame kitame langelyje) užrašome tikslo funkcijos apskaičiavimo formulę:

=C2 +D2.

6. Visi reikiami duomenys įvesti. Pavedame kompiuteriui spręsti šį uždavinį.

Tam reikia:

7. Įjungti sprendimo režimą: Tools; Solver, dialogo langelyje atlikti tokius veiksmus:

a. Set Target Cell: G2 (žymeklį uždėti ant langelio G2).
b. Pažymėti Min, nes norima minimizuoti tikslo funkciją.
c. By Changing Cells: C2:D2 (nuoroda į visus kintamuosius).
d. Add (nuorodos į ribines sąlygas):
- Cell Reference: B3:B5 (nuorodos į ribinių sąlygų formules);
- >=1 (visose ribinėse sąlygose yra ženklai daugiau arba lygu vienetui. Constraints: A3:A5 (nuorodos į ribinių sąlygų laisvuosius narius);
- OK.

e. Add (nuorodos, kad visi kintamieji turi būti neneigiami):
- Cell Reference: C2:D2;
- >=;
- 0;
- OK.

8. Solve; Keep Solver Solution; OK.

Langelyje G3 surenkame formulę =1/g3. Joje pamatysime grynosios lošimo vertės reikšmę 1,75.

Langeliuose C1 ir D1 surenkame formules =C2*G3, =D2*G3 atitinkamai ir pamatome dažnius, su kuriais reikia taikyti mūsų strategijas: pirmąją ir antrąją $p_1 = 0{,}25$, $p_2 = 0{,}75$.

Išvada. Lošėjui A reikia taikyti savo pirmąją strategiją 25 proc. atvejų, antrąją – 75 proc. atvejų. Tada jo išlošis būtų 1,75, o jei jis neieškotų šio uždavinio tikslaus sprendimo ir taikytų antrąją savo strategiją, nes toks sprendimas išplauktų iš minimakso principo, jis išloštų vieną sąlyginį vienetą.

Vadinasi, tikslus sprendimas, gautas taikant tiesinio programavimo metodą, padidina jo išlošį net trimis ketvirtadaliais, arba 75 proc. Ar verta ieškoti tikslaus sprendimo, priklauso nuo to, kas slypi po tais sąlyginiais vienetais.

Savitikros užduotys

1. Teoriniai klausimai:

1.1. Apibūdinkite konfliktinę situaciją lošimų teorijos sampratomis.

1.2. Kas tai yra mokesčių matrica?

1.3. Paaiškinkite lošimo uždavinio sprendimą taikant minimakso principą.

1.4. Kokia strategija vadinama maksiminine strategija?

1.5. Paaiškinkite mišriųjų strategijų taikymo esmę.

1.6. Kas tai yra apatinė, viršutinė ir grynoji lošimo vertės?

1.7. Kokios strategijos vadinamos aktyviosiomis strategijomis?

1.8. Paaiškinkite mokesčių matricos redukavimo taisykles.

1.9. Paaiškinkite analitinį lošimo 2 x 2 sprendimo būdą.

1.10. Kaip galima išspręsti lošimo 2 x n ir m x 2 uždavinius grafiniu būdu? Pateikite tokių uždavinių sprendimo algoritmą.

1.11. Suformuluokite lošimo m x n sprendimo būdą, taikydami tiesinio programavimo metodą.

1.12. Kaip sprendžiami lošimų uždaviniai taikant iteracinį metodą?

2. Praktinės užduotys:

2.1. Apskaičiuokite tikslias abiejų lošėjų strategijų taikymo tikimybes, jei žinomos tokios lentelėse pateiktos mokesčių matricos:

29 lentelė. **Mokesčių matrica**

A_i	Bj	
	B_1	B_2
A_1	0,3	0,5
A_2	0,4	0,35

30 lentelė. **Mokesčių matrica**

A_i	Bj	
	B_1	B_2
A_1	0,7	0,6
A_2	0,5	0,8

Atsakymai:

29 lentelė. $S_A^* = (0{,}2; 0{,}8)$, $S_B^* = (0{,}6;0{,}4)$,
$\nu = 0{,}38.$ $\nu = 0{,}38.$

30 lentelė. $S_A^* = (0{,}75; 0{,}25)$, $S_B^* = (0{,}5; 0{,}5)$,
$\nu = 0{,}65.$ $\nu = 0{,}65.$

2.2. Apskaičiuokite abiejų lošėjų aktyviąsias strategijas, jų taikymo tikimybes bei apatinę, viršutinę ir grynąją lošimo vertę, jei žinomos tokios mokesčių matricos:

31 lentelė. **Mokesčių matrica**

A_i	Bj			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	5	3	4	2
A_2	2	4	3	6

32 lentelė. **Mokesčių matrica**

A_1	Bj				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	0.8	1	1,1	0,5	0,6
A_2	1	0,7	0,6	2	1,5

Atsakymai:

31 lentelė. $\alpha = 2, \beta = 4$.

Priešininko aktyviosios strategijos – pirma ir antra.

$S_A^* = (0{,}5;\ 0{,}5)$, $S_B^* = (0{,}25;\ 0{,}75)$,

$\nu = 3{,}5.$ $\nu = 0{,}35.$

32 lentelė. $\alpha = 0{,}6, \beta = 1$.

Priešininko aktyviosios strategijos – pirma ir antra.

$S_A^* = (0{,}6;\ 0{,}4)$, $S_B^* = (0{,}6;\ 0{,}4)$,

$\nu = 0{,}88.$ $\nu = 0{,}88.$

2.3. Išspręskite 1 ir 2 uždavinius taikydami iteracinį metodą ir apsiribodami 20 iteracijų. Palyginkite tikslius sprendimus su gautais artutiniais ir padarykite išvadas.

2.4. Išnagrinėjus dviejų lošėjų, turinčių priešingus interesus, veiklos variantus ir įvertinus kiekvienos poros „mes–priešininkas“ pasekmes, sudaryta vadinamoji mokesčių matrica, pateikta 33 lentelėje. Reikia rasti mūsų ir priešininko optimaliąsias mišriąsias strategijas ir nustatyti grynąją lošimo vertę, padaryti praktines išvadas.

33 lentelė. **Mokesčių matrica**

A_i	B_1	B_2	B_3
A_1	**1**	**0**	**4**
A_2	**2**	**6**	**1**

Atsakymas:

34 lentelė**. Sprendinių lentelė**

A_i	B_1	B_2	B_3	**Sprendiniai**		
A_1	**1**	**0**	**4**	p_1 **= 0,25**	**ν =1,75**	α **= 1**
A_2	**2**	**6**	**1**	p_2 **= 0,75**		
Spren-diniai	q_1 **= 0,75**	q_2 **= 0**	q_3 **= 0,25**		**ν = 1,75**	β **= 2**

2.5. Išnagrinėjus dviejų lošėjų, turinčių priešingus interesus, veiklos variantus ir įvertinus kiekvienos poros „mes–priešininkas“ pasekmes, sudaryta vadinamoji mokesčių matrica, pateikta lentelėje. Reikia rasti mūsų ir priešininko optimaliąsias mišriąsias strategijas ir nustatyti grynąją lošimo vertę, padaryti praktines išvadas.

35 lentelė. **Mokesčių matrica**

A_i	B_1	B_2	B_3
A_1	**4**	**5**	**3**
A_2	**1**	**-1**	**5**

Atsakymas:

36 lentelė. **Sprendinių lentelė**

A_i	B_1	B_2	B_3	**Sprendiniai**		
A_1	**4**	**5**	**3**	p_1 **=0,8**	v **= 3,4**	α **= 3**
A_2	**1**	**-1**	**5**	p_2 **=0,2**		
Spren-diniai	q_1 **= 0,4**	q_1 **= 0**	q_3 **= 0,6**		v **= 3,4**	β **= 4**

2.6. Išnagrinėjus dviejų lošėjų, turinčių priešingus interesus, veiklos variantus ir įvertinus kiekvienos poros „mes–priešininkas“ pasekmes, sudaryta vadinamoji mokesčių matrica, pateikta lentelėje. Reikia rasti mūsų ir priešininko optimaliąsias mišriąsias strategijas ir nustatyti grynąją lošimo vertę, padaryti praktines išvadas.

37 lentelė. **Mokesčių matrica**

A_i	B_1	B_2	B_3
A_1	**7**	**6**	**5**
A_2	**5**	**6**	**7**
A_3	**3**	**2**	**8**

Atsakymas:

38 lentelė. **Sprendinių lentelė**

A_i	B_1	B_2	B_3	**Sprendiniai**		
A_1	**7**	**6**	**5**	p_1 = **0,5**	**ν = 6**	α **= 5**
A_2	**5**	**6**	**7**	p_2 = **0,5**		
A_3	**3**	**2**	**8**	p_3 **= 0**		
Spren-diniai	q_1 **= 0,333**	q_2 **= 0,333**	q_3 **= 0,333**		**ν = 6**	β **= 6**

6 TEMA

SPRENDIMŲ MEDŽIAI

Sprendimų (sprendinių) medžiai padeda aiškiau suvokti esamą situaciją, numatyti galimus sprendimų variantus, nustatyti įvairių sprendimų tarpusavio ryšį, suvokti, kokios informacijos reikėtų turėti, norint įvertinti priimamų sprendimų pasekmes, kiek verta mokėti už papildomos informacijos paiešką, grubiai apskaičiuoti galimų sprendimo variantų rezultatus ir atlikti kai kurias kitas funkcijas.

Pasirenkant situacijos analizės metodą, reikia:

- apžvelgti galimų sprendimų variantų aibę,
- sukaupti kuo daugiau informacijos apie kiekvieną iš jų,
- apskaičiuoti (jei tai įmanoma) kiekvieno sprendimo pasekmes
- ir pasiūlyti vieno iš tų variantų pasirinkimo metodiką
- arba bent jau suteikti galimybę logiškai analizuoti tų sprendimų aibę.

Vaizdinė sprendimų medžių priemonė – sprendimų medžio diagrama. Būtent grafinė įvairių situacijų ir sprendimų interpretacija yra pagrindinis veiksnys, leidžiantis geriau suvokti galimų situacijų ir priimtinų sprendimų visumą, išvengti pernelyg detalios kiekvienos situacijos analizės, dubliuojančių sprendinių, išsiaiškinti, kokia yra kiekvieną situaciją apibūdinančių įvykių seka, kaip turi būti su ta įvykių seka susiję priimami sprendimai.

Pagrindinis sprendimų medžio tikslas – pavaizduoti visus sprendimus ir situacijas, susijusias tarpusavyje įvairiais būdais, kad būtų galima pastebėti visus sprendimų variantus ir svarbiausius veiksnius bei pasirinkti atitinkamus analizės metodus. Toks vaizdas yra vadinamas ***sprendimų medžio diagrama.***

Tai, kad sprendimų medžių diagramos nėra plačiai taikomos, nors jų praktinė nauda akivaizdi, susiję su daugeliu veiksnių, tarp kurių paminėtini šie:

- dažnai specialistai nėra susipažinę su šio metodo galimybėmis;

- pasigendama literatūros šiuo klausimu ir sėkmingų šios diagramos taikytų pavyzdžių praktinėje valdymo veikloje;
- dažnai manoma, kad tai tik abstraktūs samprotavimai, neturintys apčiuopiamos praktinės naudos;
- nepakankamai suvokiami kiekybiniai priimamų sprendimų vertinimo metodai, būtinybė juos itin kruopščiai atrinkti, siejant juos su konkrečia situacija ir priimamų sprendimų pasekmėmis.

Praktiškai priimant įvairius sprendimus tenka nagrinėti daug variantų.

Svarbu apibrėžti kiekvieną iš tokių variantų ir išanalizuoti jų panaudojimo pasekmes.

Paprastai negali būti tiksliai nustatytos visos sąlygos, kurios gerina ar blogina kiekvieno sprendimo rezultatą.

Kartais pasiseka rasti tikimybes, apibūdinančias kokių nors sąlygų komplekso pasirodymą ar bent jau atsitiktinio dydžio, susijusio su tų sąlygų kompleksu, pasiskirstymo dėsnį. Tačiau yra nemažai situacijų, kai negalima taikyti tikimybių teorijos, o sprendimą reikia pasirinkti.

Sprendimų medžio diagrama taikoma ir ten, kur įvykių kompleksas nesutampa su galimomis strategijomis, arba, jei ir sutampa, yra skirtingos tų strategijų tikimybės. Ši diagrama naudinga ir tada, kai yra galimybė atidėti sprendimo priėmimo aktą ir atlikti eksperimentą arba surinkti papildomos informacijos.

6.1. Sprendimų medžio diagrama

Sprendimų medžio diagrama yra sudaroma naudojant keturis elementus:

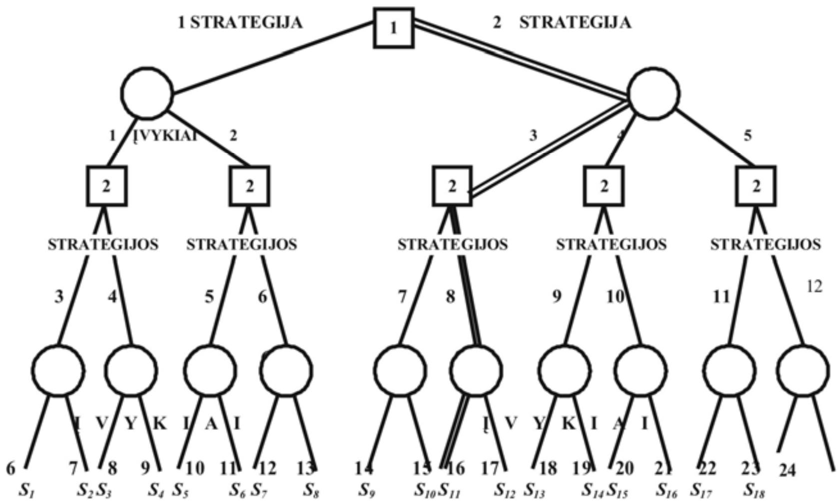
- ***šakas,***
- ***sprendimų mazgus,***
- ***įvykių mazgus***
- ***ir sprendimų rezultatus.***

Šaka yra vienintelė galima linija, jungianti arba du mazgus, arba mazgą ir sprendimo rezultatą. Paprastai sprendimų mazgas žymimas kvadrato ženklu, iš kurio išeina dvi arba daugiau šakų. Kiekviena tokia šaka vaizduoja vieną galimą strategiją. Įvykis vaizduojamas skritulio formos ženklu, iš kurio išeina įvykių šakos.

Sprendimo rezultatas formuojamas nuosekliai einant nuo pradinio sprendimo iki galutinio taško vieninteliu keliu, susidedančiu iš šakų ir mazgų. 1 paveiksle pateikta viena iš galimų sprendimų medžio diagramų.

Pirmas sprendimas pasirenkamas iš dviejų strategijų. Jei pasirenkama pirma strategija, atsitiktinai gali įvykti pirmas arba antras įvykis, jei antra – įvyksta vienas iš trijų galimų įvykių. Asmuo, priimantis sprendimus, yra viename iš penkių galimų mazgų, pažymėtų skaičiais 2. Dabar pasirenkama viena iš dviejų strategijų – 3 arba 4, 5 arba 6, 7 arba 8, 9 arba 10, 11 arba 12, ir kiekvienu atveju gali įvykti bet kuris iš dviejų įvykių – 6 arba 7, 8 arba 9 ir t. t. Priklausomai nuo to, kokie sprendimai buvo priimti ir kokie įvykiai įvyko, gaunamas vienas iš 20 sprendimo rezultatų, tarkime, S_{11} (1 pav. kelias pažymėtas dviguba linija).

Sudarius tokį sprendimų medį, apskaičiuojami visi galimi rezultatai S_i, $i = 1, 2, ..., n$ ir pasirenkamos tokios strategijos, kurios maksimizuoja pelną (minimizuoja nuostolius) arba didina kokius nors kitus vadybininkui svarbius rodiklius.



1 pav. **Bendra sprendimų medžio diagrama**

6.2. Papildomos informacijos panaudojimas

Papildomos informacijos paskirtis yra atsakyti į klausimus:

1. Kokios situacijos neapibrėžtumą reikia mažinti?
2. Kokių veiksnių įtaką reikia tikslinti?

3. Kokie informacijos šaltiniai gali būti panaudoti?
4. Kiek tam gali prireikti laiko?
5. Kiek tai gali kainuoti?
6. Kiek tam prireiks personalo ir kitų išteklių?
7. Kaip pasikeistų veiklos rezultatai, jei papildoma informacija būtų panaudota?

Naudojamos sprendimų priėmimo algoritme tikimybės dažniausiai būna arba subjektyvios, arba netikslios, nes apskaičiuotos apytikriai, remiantis keleto bandymų rezultatais. Pasirodo, tas tikimybes galima tikslinti. Vienas iš būdų – pasinaudoti Bejeso formule.

Neapibrėžtos situacijos yra susijusios su subjektyviai nustatomomis kokių nors įvykių tikimybėmis daugiausia remiantis specialiai atrinktų ekspertų vertinimais ir taikant įvairius surinktų subjektyvių vertinimų apdorojimo būdus. Tokie būdai gana nuodugniai aprašyti R. M. Cooke'o knygoje [3], kurioje smulkiai nagrinėjamos ekspertavimo procedūros, subjektyvių tikimybių identifikavimo būdai, tikimybiniai ekspertų nuomonių derinimo instrumentai, Bejeso modeliai ir daug kitų subtilių subjektyvių tikimybių nustatymo ir apdorojimo metodų.

Nėra abejonės, kad asmuo, naudodamasis papildoma informacija, gali sumažinti situacijos neapibrėžtumą ir rasti geresnį sprendimą. Ši papildoma informacija gaunama atliekant specialų eksperimentą arba apdorojant jau turimus duomenis, susijusius su tokia situacija. Tai leidžia patikslinti įvykių tikimybes ir gali būti pavaizduota paprastu pavyzdžiu.

Tarkime, siūloma mesti kauliuką, kurio plokštumose yra pažymėti 1, 2, 3, 4, 5 arba 6 taškai. Siūlomos lažybos: jei iškrinta 1, 2 arba 3 taškai, pirmas žaidėjas moka antrajam sutartą sumą, o jei 4, 5 arba 6 – antrasis pirmajam. Iki žaidimo pradžios žinoma, kad tokių įvykių tikimybės yra vienodos. Tačiau kai antras žaidėjas siūlo didesnę sumą, kurią jis moka, jei pirmasis išlošia, verta patikrinti kauliuko simetriškumą. Tam reikalui šį kauliuką galima mesti, tarkime, 100 kartų, t. y. atlikti eksperimentą, ir jei rezultatai būna iškreipti (tų įvykių dažniai smarkiai skiriasi) – arba nedalyvauti žaidime, arba pakeisti kauliuką, arba pakoreguoti piniginių užstatų santykį.

Faktiškai šio bandymo metu patikslinamos dviejų įvykių tikimybės.

Bendru atveju papildomos informacijos tikslinimas galimas panaudojant Bejeso formulę. Jos esmė yra tokia.

Įvykis, kurio tikimybę norima tikslinti, priklauso nuo konkrečios susiklosčiusios situacijos. Kiekviena tokia situacija gali būti apibūdinta tyrėją dominančio įvykio požiūriu, t. y. kiek susidariusi situacija yra palanki dominančiam įvykiui atsirasti. Išvardijamos visos tokios skirtingos situacijos, kurios bendru atveju vadinamos hipotezėmis, jos žymimos simboliais H_i, ir įvertinamos tokių situacijų pasirodymo tikimybės $P(H_i)$. Kadangi išvardijamos visos tokios situacijos ir jos nėra susijusios viena su kita, tai sakoma, kad jos nesikerta ir tų hipotezių tikimybių suma yra lygi vienetui, t. y. teisinga formulė

$$\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1, \qquad (1)$$

čia n – suformuluotų hipotezių skaičius.

Pažymime tyrėją dominantį įvykį simboliu A.

Tarkime, tyrėjui žinomos įvykio A pasirodymo tikimybės, kai teisinga hipotezė H_i, t. y. sąlyginės tikimybės $P(\mathrm{A} / H_i)$.

Atliktas eksperimentas, kurio metu pasirodė įvykis A.

Norima sužinoti, kokia yra tikimybė, kad tai atsitiko įvykus hipotezei H_i. Ši tikimybė apskaičiuojama pasitelkus Bejeso formulę

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A / H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A / H_i)}, i = 1,\ 2,\ ...,\ n\ .$$

Šitaip apskaičiuota tikimybė, kad dominančiam įvykiui atlikus eksperimentą buvo palanki konkreti situacija, gali būti interpretuota kaip pakoreguota hipotezės H_i tikimybė.

Išnagrinėsime pavyzdį, susijusį su žemės sklypo nuoma, kuriame reikia sudaryti sprendimų medį, apskaičiuoti įvairių sprendimų pasekmes ir įvertinti papildomos informacijos svarbą, taikant Bejeso formulę.

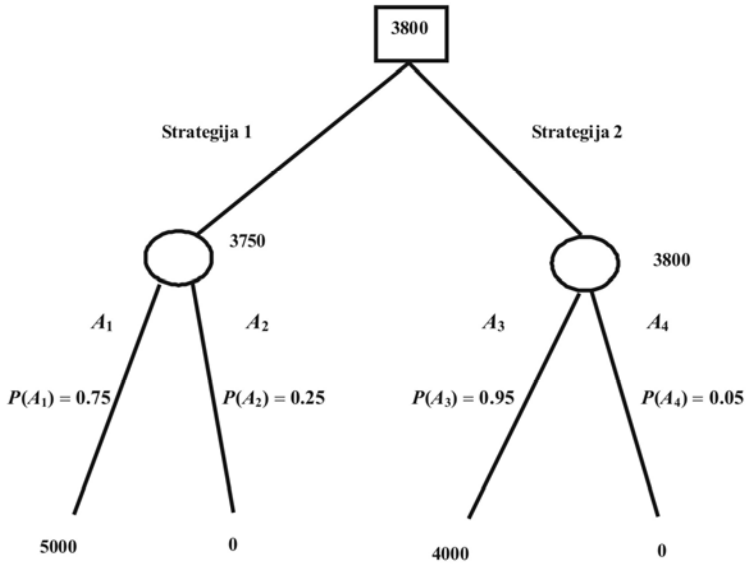
Uždavinys 6.1. Sakykime, žemės sklypo savininkas sprendžia klausimą, kam tą sklypą išnuomoti – privačiam savininkui už 5000 Lt (strategija S_1) ar žemės ūkio bendrijai už 4000 Lt (strategija S_2).

Išnuomojus žemę kiekvienu atveju galimi du variantai: nuomininkai gali sumokėti nuomą arba nesumokėti jos (bankrutuoti).

Žinant ekonomines sąlygas Lietuvoje, įvertintos tokių įvykių tikimybės: tikimybė, kad privatus savininkas sumokės nuomą, yra $P(A_1) = 0{,}75$, kad bankrutuos (vadinasi, ir nesumokės nuomos) – $P(A_2) = 0{,}25$; tikimybė, kad žemės ūkio bendrija sumokės nuomą – $P(A_3) = 0{,}95$, kad nesumokės jos – $P(A_4) = 0{,}05$.

Šio uždavinio sprendimų medis pateiktas 2 paveiksle. Skaičiuojame kiekvienos strategijos pelno vidurkį:

$$W(S_1) = 5000 \cdot 0{,}75 + 0 \cdot 0{,}25 = 3750 \text{ Lt},$$
$$W(S_2) = 4000 \cdot 0{,}95 + 0 \cdot 0{,}05 = 3800 \text{ Lt}.$$



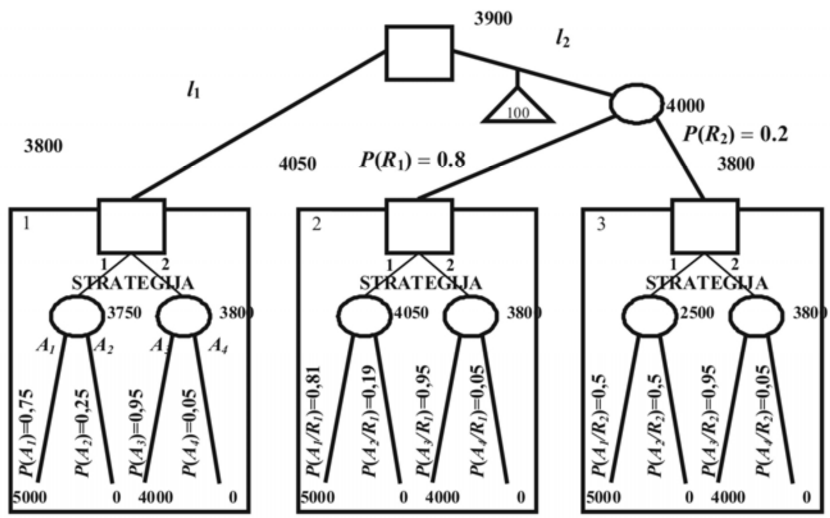
2 pav. **Žemės sklypo nuomos sprendimų medis, sudarytas nesinaudojant papildoma informacija**

Šiuos vidurkius tikslinga parašyti prie įvykių ir sprendimų mazgų (2 pav.).

Palyginę šio kriterijaus reikšmes matome, kad tikslinga nuomoti žemę žemės ūkio bendrijai. Šis sprendimas daugiausia priklauso nuo bankroto tikimybių. Jei jos būtų tiksliai žinomos, būtų galima pasirinkti geresnę strategiją ir gauti daugiau pelno.

Tarkime, kad žemės sklypo savininkas, prieš nuomodamas tą sklypą, kreipiasi į ekonomistą, kuris už 100 Lt įvertina visų pretendentų ekonominę padėtį ir nustato, kurį iš jų pasirinkti ir kokia yra pasirinkto nuomininko nemokumo (vadinasi, ir mokumo) tikimybė. Savininkas gali pasinaudoti šiomis rekomendacijomis arba nepasinaudoti. Sakykime, jis pasirenka pretendentą, bet gali nesutikti su apskaičiuotomis tikimybėmis. Pažymime eksperto rekomendacijas: R_1, R_2 – teigiamas arba neigiamas patarimas nuomoti privačiam savininkui; R_3, R_4 – teigiamas arba neigiamas patarimas nuomoti žemės ūkio bendrijai.

Sprendimų medis pateiktas 3 paveiksle.



3 pav. **Žemės sklypo nuomos sprendimų medis, sudarytas naudojantis papildoma informacija**

Išskiriame strategijas, susijusias su sprendimais ieškoti arba neieškoti papildomos informacijos (I_1, I_2), ir įvykius R_1, R_2, ... , reiškiančius, kad patarimais naudojamasi arba nesinaudojama.

Diagramoje tikslinga pažymėti ir informacijos kainą. Ji paprastai rašoma trikampyje, sujungtame su atitinkama strategija. Ši kaina naudojama tik vertinant strategiją I_1.

Šioje diagramoje patogu išskirti dalis, pažymėtas stačiakampiu. Pirmoje dalyje papildoma informacija nesinaudojama, todėl įvykių tikimybės $P(A_1)$ ir $P(A_2)$ yra tos pačios, kurias tam tikru būdu nustatė pats žemės sklypo savininkas. Antroje dalyje pateikta sprendimo priėmimo schema, kai yra teikiama papildoma informacija dėl nuomos privačiam savininkui. Čia matome sąlygines tikimybes $P(A_1/R_1)$. Tikimasi, kad šios tikimybės skiriasi nuo tikimybių $P(A_i)$.

Žemės sklypo savininkas, samdydamas ekspertą, nori įvertinti jo kvalifikaciją arba reitingą. Tam būtina išnagrinėti šio eksperto ankstesnės prognozės rezultatus. Tarkime, tokie rezultatai, kai šis ekspertas rekomendavo arba nerekomendavo nuomoti žemės sklypą privačiam nuomotojui, pateikti 1 lentelėje (tokius duomenis kaupia ir teikia firma, kurioje dirba ekspertas).

1 lentelė. **Eksperto prognozių rezultatai**

Rekomendacija	Įvykiai		Bendras skaičius
	A_1 moka	A_2 nemoka	
R_1 (teigiama)	82	3	85
R_2 (neigiama)	13	2	15
Bendras skaičius	95	5	100

2 lentelėje pateiktos tų įvykių sąlyginės tikimybės, apskaičiuotos naudojant 1 lentelės skaičius.

2 lentelė. **Sąlyginės tikimybės P(R/A)**

Rekomendacija	$P(R_i/A_i)$	
	$P\,(R_i/\,A_1)$	$P\,(R_i/\,A_2)$
R_1 (teigiama)	$\frac{82}{95}=0{,}863$	$\frac{3}{5}=0{,}6$
R_2 (neigiama)	$\frac{13}{95}=0{,}137$	$\frac{2}{5}=0{,}4$
	$\sum=1$	$\sum=1$

Norint apskaičiuoti reikiamas tikimybes, galima pasinaudoti Bejeso formule, nes žinomos tikimybės $P(R/A)$, o reikia apskaičiuoti tikimybes $P(A/R)$. Be to, žinomos apriorinės tikimybės $P(A_i)$: $P(A_1) = 0{,}75$, $P(A_2) = 0{,}25$. Dabar galima apskaičiuoti R ir A įvykių sandaugos tikimybes, nes

$P(R{\cdot}A) = P(A) \cdot P(R/A)$.

Rezultatus galima surašyti į 3 lentelę, kurioje kiekvienas 2 lentelės elementas yra dauginamas iš tam stulpeliui priklausančios apriorinės įvykio A tikimybės.

3 lentelė. **Tikimybių P(R·A) reikšmės**

Rekomendacija	Įvykis		$P(R)$
	A_1	A_2	
R_1	0,65	0,15	0,8
R_2	0,1	0,1	0,2
	x0,75	x0,25	

4 lentelė. **Tikimybių P(A/R) reikšmės**

Rekomendacija	Įvykis	
	A_1	A_2
R_1	0,81	0,19
R_2	0,5	0,5

Pagaliau skaičiuojame tikimybių reikšmes, kurios pateiktos paskutinėje 4 lentelėje, t. y. tikimybes $P(A/R) = \dfrac{P\,(RA)}{P\,(R)}$.

Tam reikia kiekvieną 3 lentelės elementą padalyti iš toje eilutėje esančios reikšmės $P(R)$, pvz., $P(A_1/R_1)$ = 0,65 / 0,8 = 0,81. Šios tikimybės ir yra tos patikslintos tikimybės, apskaičiuotos naudojantis papildoma informacija, jas reikia taikyti vietoj apriorinių tikimybių $P(A_1)$ ir $P(A_2)$. Be to, apskaičiuotos teigiamos ir neigiamos rekomendacijos tikimybės: $P(R_1) = 0{,}8$, $P(R_2) = 0{,}2$. Kartu su 3 lentelės reikšmėmis jos užrašomos atitinkamoje diagramos, pateiktos 3 paveiksle, vietoje.

Pelno vidurkiai 2 ir 3 stačiakampiuose (3 pav.) sudaro:

2 stačiakampyje:

$W_I(S_1) = 5000 \cdot 0{,}81 + 0 \cdot 0{,}19 = 4050$ Lt,

$W(S_2) = 4000 \cdot 0{,}95 + 0 \cdot 0{,}05 = 3800$ Lt;

3 stačiakampyje:

$W_I(S_1) = 5000 \cdot 0{,}5 + 0 \cdot 0{,}05 = 2500$ Lt,

$W(S_2) = 4000 \cdot 0{,}95 + 0 \cdot 0{,}05 = 3800$ Lt;

čia $W_I\,(S_1)$ – vidurkis, kurį skaičiuojant naudojamasi papildoma informacija.

Kadangi informacija buvo surinkta tik apie privačius savininkus nuomotojus, tai žemės ūkio bendrijų įvykių tikimybės nepasikeitė, t. y.

$P(A_3/R_1) = P(A_3/R_2) = P(A_3)$, $P(A_4/R_1) = P(A_4/R_2) = P(A_4)$.

Dabar galima įvertinti ir variantus I_1 ir I_2 – ieškoti arba neieškoti papildomos informacijos. Apskaičiuojame pelno vidurkius:

$W(I_1) = 4050 \cdot 0{,}8 + 3800 \cdot 0{,}2 - 100 = 3900$ Lt,

$W(I_2) = 3800$ Lt.

Galutinis atsakymas yra toks: pasinaudoti eksperto paslaugomis, nes gaunamas pelnas yra didesnis: – 3900 Lt vietoj 3800 Lt. Be to, matome, kad ekspertui galima mokėti ne daugiau kaip 200 Lt (4000–3800 Lt), nes mokant daugiau pelno bus mažiau nei 3800 Lt. Jei eksperto rekomendacija teigiama, reikia pasirinkti pirmą strategiją, t. y. žemės sklypą išnuomoti privačiam savininkui, jei ta rekomendacija neigiama – žemės ūkio bendrijai.

Išnagrinėję šį uždavinį matome, kaip galima pasinaudoti papildoma informacija, kiek tikslinga už ją mokėti ir kaip keičiasi sprendimo turinys. Kadangi taikant Bejeso formulę atliekami nesudėtingi skaičiavimai, tai šis sprendimų priėmimo būdas gali būti plačiai taikomas.

6.3. Kiti sprendimų medžių pavyzdžiai

Tikslinga išnagrinėti dar kelis pavyzdžius, turinčius akivaizdžią praktinę reikšmę. Vienas iš jų susijęs su eksperto nuomonės arba rekomendacijos įvertinimu. Ši problema jau buvo gvildenta, tačiau verta susipažinti ir su gana paprastu tokio eksperto įvertinimo algoritmu. Tai patogu padaryti pasitelkus konkretų pavyzdį.

6.3.1. Sąskaitos banke atidarymas

Uždavinys 6.2. Tarkime, pilietis sprendžia uždavinį – atidaryti ar ne asmeninę sąskaitą konkrečiame banke. Išnagrinėjęs to banko veiklą jis nustatė, kad pastaruoju metu palūkanos jame sumažėjo 10 proc. Nepasitikėdamas savo žiniomis šioje srityje, pilietis nusprendė pasinaudoti banko eksperto nuomone, t. y. kreiptis į jį mokamos konsultacijos. Konsultacijų biuro darbuotojų teigimu, ekspertas teisingai atspėja 80 proc. visų palūkanų didėjimo atvejų ir 60 proc. – visų palūkanų mažėjimo atvejų.

Pilietis nori žinoti: jei ekspertas teigia, jog palūkanos mažės, kokia tikimybė, kad iš tikrųjų jos didės.

*Sprendimas***.** Pažymime įvykius: A_1 – palūkanos didėja, A_2 – palūkanos mažėja; R_1 – ekspertas teigia, kad palūkanos didės, R_2 – kad jos mažės. Pagal žinomus eksperto rodiklius sudarome tikimybių $P(R/A)$ lentelę (5 lent.). Joje pateiktos tikimybės, kad įvykus įvykiui A ekspertas buvo teisus arba neteisus.

5 lentelė. **Eksperto prognozės P(R/A) rezultatai**

Ekspertas prognozuoja	Įvykis	
	A_1 – palūkanos didėja	A_2 – palūkanos mažėja
R_1 – palūkanos didės	0,8	0,4
R_2 – palūkanos mažės	0,2	0,6

Pilietis *a priori* žino, kad $P(A_1) = 0{,}9$ ir $P(A_2) = 0{,}1$.

Žinomu mums būdu nustatome $P(AR) = P(A) \cdot P(R/A)$ tikimybes, kad prognozė ir įvykis sutaps arba nesutaps, ir surašome jas 6 lentelėje.

6 lentelė. **Tikimybės P(AR)**

Ekspertas prognozuoja	Įvykis		$P(R)$
	A_1 – palūkanos didėja	A_2 – palūkanos mažėja	
R_1 – palūkanos didės	0,72	0,04	0,76
R_2 – palūkanos mažės	0,18	0,06	0,24

Naudodamiesi šia lentele, skaičiuojame aposteriorines įvykių A tikimybes $P(A/R) = P(AR)/P(R)$, t. y. tikimybes, kad įvyks įvykiai A_i, jei ekspertas prognozavo įvykius A_j. Tikimybė, kad palūkanos didės, kai ekspertas prognozuoja, jog jos mažės, yra: $P(A_1/R_2) = 0{,}75$ (7 lent.).

7 lentelė. **Tikimybės P(A/R)**

Ekspertas prognozuoja	Įvykis	
	A_1 – palūkanos didėja	A_2 – palūkanos mažėja
R_1 – palūkanos didės	0,947	0,053
R_2 – palūkanos mažės	0,75	0,25

Išvada. Ekspertas trimis atvejais iš keturių klysta, kai tvirtina, jog palūkanos mažės, tuo tarpu jo prognozės, kad palūkanos didės, yra teisingos 95 proc. atvejų. Samdant tokį ekspertą, reikia pasitikėti jo teigiamomis (palūkanų didėjimo) ir nepasitikėti neigiamomis rekomendacijomis.

Apibendrinant pažymėtina, kad yra nemažai praktinių situacijų, kai šis metodas gali būti taikomas tiesiogiai, pvz., prognozuojant kainų šuolius, infliacijos, prekių paklausos dydį, keleivių srautus ir t. t.

Išnagrinėsime dar vieną uždavinį.

6.3.2. Vandens tiekimo sistemos pasirinkimas

Uždavinys 6.3. Pilietis, pasistatęs vasarnamį, sprendžia vandens tiekimo problemą. Jis gali pasinaudoti centrine vandens tiekimo sistema už 5000 Lt arba įsirengti autonominę vandens tiekimo sistemą su šuliniu. Tarkime, kad to šulinio eksploatacijos išlaidos ir mokestis už centralizuotai tiekiamą vandenį yra vienodo dydžio.

Šulinio kaina, atsižvelgiant į jo gylį, gali būti 3000, 4000, 5000 ir 6000 Lt. Savininkas išmatavo visų gyvenvietėje esančių šulinių gylius ir nustatė: tikimybė, kad šulinys kainuos 3000 Lt, yra 0,1; 4000 Lt – 0,2; 5000 Lt – 0,4; 6000 Lt – 0,3.

Vasarnamio savininkas už 100 Lt gali pasisamdyti šulinių ekspertą, kad šis nustatytų šulinio gylį. Tas gylis negali būti tiksliai nusakomas, todėl jį galime įvertinti pasitelkę to eksperto prognozių tikimybes, pateiktas 8 lentelėje.

8 lentelė. **Tikimybės P(R/A)**

Rekomendacija	Įvykis			
	A_1	A_2	A_3	A_4
R_1 – teigiama	0,7	0,8	0,5	0,3
R_2 – neigiama	0,3	0,2	0,5	0,7
$P(A_i)$	0,1	0,2	0,4	0,3

*Sprendimas***.** Pažymime strategijas:
I_1 – nekviesti eksperto;
I_2 – kviesti ekspertą;
S_1 – kasti šulinį;
S_2 – pasinaudoti centrine vandens tiekimo sistema.
Pažymime įvykius:
A_1 – šulinio kaina 3000 Lt;
A_2 – šulinio kaina 4000 Lt;
A_3 – šulinio kaina 5000 Lt;
A_4 – šulinio kaina 6000 Lt;
R_1 – rekomendacija kasti šulinį (teigiama);
R_2 – rekomendacija nekasti šulinio (neigiama).

Sudarome sprendimų medį ir ant jo surašome visus turimus duomenis (4 pav.). Sprendimų medis sudarytas iš trijų vienodų stačiakampių, kuriuose skiriasi tik skaičiai.

Kai specialisto nuomonė nėra svarstoma (pirmasis stačiakampis), naudojamos apriorinės įvykių A_i tikimybės, nustatytos paties vasarnamio šeimininko. Vidutinė šulinio įrengimo kaina apskaičiuojama taip:

$$W_{1_1}(S_1) = 0{,}1 \cdot 3000 + 0{,}2 \cdot 4000 + 0{,}4 \cdot 5000 + 0{,}3 \cdot 6000 = 4900 \text{ Lt}.$$

Iš čia matome, kad be papildomos informacijos tikslinga kasti šulinį.

Norint panaudoti eksperto žinias, reikia apskaičiuoti sąlygines $P(A/R)$ tikimybes, todėl anksčiau išnagrinėtu būdu sudarome 9 ir 10 lenteles.

9 lentelė. **Tikimybės P(AR)**

Rekomendacija	Įvykis				$P(R)$
	A_1	A_2	A_3	A_4	
R_1 – teigiama	0,07	0,16	0,2	0,09	0,52
R_2 – neigiama	0,03	0,04	0,2	0,21	0,48

10 lentelė. **Tikimybės P(A/R)**

Rekomendacija	Įvykis			
	A_1	A_2	A_3	A_4
R_1 – teigiama	0,135	0,307	0,385	0,173
R_2 – neigiama	0,063	0,083	0,417	0,437

Vidutinė šulinio įrengimo kaina, kai ekspertas nerekomenduoja jo kasti, yra:

$$W_{1_2}(R_2, S_1) = 0{,}063 \cdot 3000 + 0{,}083 \cdot 4000 + 0{,}417 \cdot 5000 + + 0{,}437 \cdot 6000 = 5228 \text{ Lt}.$$

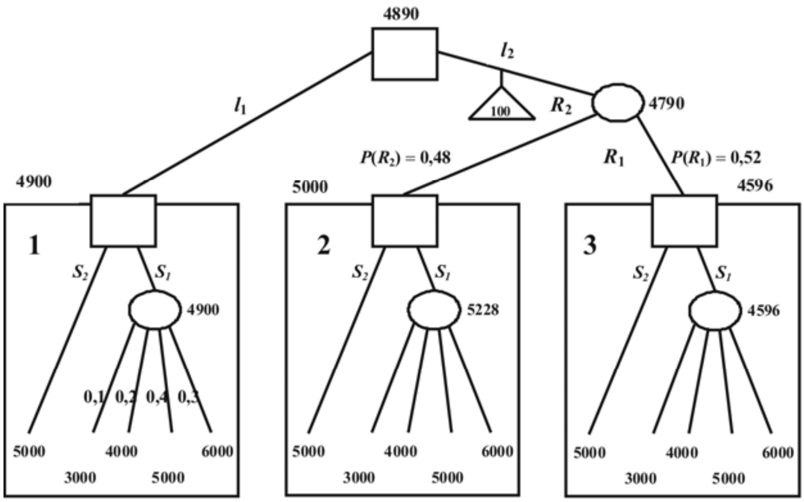
Įrašome šią reikšmę į 2 stačiakampį prie apskritimo (4 pav.).

Vidutinė šulinio įrengimo kaina, kai ekspertas rekomenduoja jį kasti, yra:

$$W_{1_2}(R_1, S_1) = 0{,}135 \cdot 3000 + 0{,}307 \cdot 4000 + 0{,}385 \cdot 5000 + \\ + 0{,}173 \cdot 6000 = 4596 \text{ Lt}.$$

Šią reikšmę įrašome į 3 stačiakampį prie apskritimo (4 pav.).

Nagrinėjame 2 stačiakampį. Jei eksperto rekomendacija nepalanki arba neigiama, patartina vandens sistemą prijungti prie centrinio vandentiekio, nes tai kainuotų ne 5228 Lt, o 5000 Lt. Jei ekspertas rekomenduoja kasti šulinį, reikia su tuo sutikti, nes šulinį įrengti tokiu atveju atsieitų pigiau – ne 5000 Lt, o 4596 Lt.



4 pav. **Vandens tiekimo sistemos pasirinkimo sprendimų medis**

Jeigu bus paisoma eksperto rekomendacijos, vandens sistemos įrengimas vidutiniškai kainuos:

$$W_{1_2}\ (R_1,\ R_1) = 0{,}48 \cdot 5000 + 0{,}52 \cdot 4596 = 4790 \text{ Lt.}$$

Sumokėjus ekspertui 100 Lt, vandens sistemos įrengimas kainuotų 4890 Lt. Vadinasi, turi būti priimti tokie sprendimai: pirma, samdyti ekspertą; antra, jei specialisto rekomendacija yra palanki arba teigiama, – kasti šulinį; trečia, jei eksperto rekomendacija neigiama, – pasinaudoti centrine vandentiekio sistema. Dirbant pagal šias rekomendacijas, vidutiniškai bus išleista 4890 Lt.

Išnagrinėti pavyzdžiai rodo, kad sprendimų medis palengvina uždavinio analizę, parodo kiekvieno sprendimo padarinius, suteikia galimybę prasmingai keisti kai kuriuos duomenis, patvirtina arba paneigia papildomos informacijos svarbą. Visi skaičiavimai, vertinant sprendimus, yra gana paprasti ir todėl prieinami vadybininkui, analizuojančiam bet kokius verslo planus. Dėl šių priežasčių tikslinga sudarinėti sprendimų medžius ir naudotis pagrįstomis išvadomis.

6.3.3. Produkcijos realizavimas

Uždavinys 6.4. Trys agentai nuperka po tam tikrą obuolių kiekį, neviršydami iš anksto nustatytos vieno kilogramo kainos. Obuolių pasiūla skirtinguose rajonuose, į kuriuos išvyko po vieną agentą, nevienoda. Turimais statistikos duomenimis, pirmame rajone buvo sėkmingai nupirkta obuolių 20 proc. atvejų, antrame – 45 ir trečiame – 35 proc. atvejų. Taigi nupirkta viena partija obuolių. Apskaičiuokite tikimybes, kad tai padaryta pirmame, antrame ar trečiame rajone.

Pažymime:

H_0 – obuoliai nenupirkti nė viename rajone;

H_1 – obuoliai nupirkti viename (H_{11} – pirmame, H_{12} – antrame, H_{13} – trečiame) rajone;

H_2 – obuoliai nupirkti dviejuose rajonuose;

H_3 – obuoliai nupirkti trijuose rajonuose.

Apskaičiuojame šių hipotezių tikimybes. Įvykiais B_1, B_2, B_3 pažymime obuolių pirkimą pirmame, antrame ir trečiame rajonuose. Atitinkamai žymime $\overline{B}_1$, $\overline{B}_2$, $\overline{B}_3$ – jų nepirkimą šiuose rajonuose. Tada

$$P(H_0) = P(\overline{B}_1) \cdot P(\overline{B}_2) \cdot P(\overline{B}_3) = 0{,}8 \cdot 0{,}55 \cdot 0{,}65 = 0{,}286,$$

$$P(H_1) = P(B_1) \cdot P(\overline{B}_2) \cdot P(\overline{B}_3) + P(\overline{B}_1) \cdot P(B_2) \cdot P(\overline{B}_3) +$$
$$+ P(\overline{B}_1) \cdot P(\overline{B}_2) \cdot P(B_3) = 0{,}2 \cdot 0{,}55 \cdot 0{,}65 + 0{,}8 \cdot 0{,}45 \cdot$$
$$\cdot 0{,}65 + 0{,}8 \cdot 0{,}55 \cdot 0{,}35 = 0{,}4595,$$

$$P(H_2) = P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot P(\overline{B}_3) + P(B_1) \cdot P(\overline{B}_2) \cdot P(B_3) +$$
$$+ P\overline{B}_1 \cdot P(B_2) \cdot P(B_3) = 0{,}2 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}65 + 0{,}2 \cdot 0{,}55 \cdot 0{,}35 +$$
$$+ 0{,}8 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}35 = 0{,}223,$$

$$P(H_3) = P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot P(B_3) = 0{,}2 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}35 = 0{,}0315.$$

Patikriname būtiną sąlygą

$$\sum_{i=0}^{3} P(H_i) = 0{,}286 + 0{,}4595 + 0{,}223 + 0{,}0315 = 1.$$

Matome, kad $P(H_1) = P(H_{11}) + P(H_{12}) + P(H_{13})$.

Pažymime įvykį A – nupirkta viena obuolių partija. Tada sąlyginės tikimybės yra šios:

$P(A/H_0) = 0$, $P(A/H_1) = 1$, $P(A/H_2) = 0$, $P(A/H_3) = 0$.

Tikimybė, kad obuoliai nupirkti pirmame rajone:

$$P(H_{11}/A) = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}55 \cdot 0{,}65 \cdot 1}{0{,}2 \cdot 0{,}55 \cdot 0{,}65 \cdot 1 + 0{,}8 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}65 \cdot 1 + 0{,}8 \cdot 0{,}55 \cdot 0{,}35 \cdot 1} = 0{,}156\,.$$

Tikimybė, kad obuoliai nupirkti antrame rajone:

$$P(H_{12}/A) = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}65 \cdot 1}{0{,}4595} = 0{,}509.$$

Tikimybė, kad obuoliai nupirkti trečiame rajone:

$$P(H_{13}/A) = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}55 \cdot 0{,}35 \cdot 1}{0{,}4595} = 0{,}335.$$

Išvados:

1. Tikimybė, kad obuolių partija nupirkta antrame rajone, yra didžiausia. To ir buvo galima laukti, nes vidutiniškai šiame rajone buvo perkama dažniau.

2. Toliau perkant obuolius, jei nebuvo nustatyta, kuriame rajone buvo nupirkti obuoliai, galima laikyti, kad pirmame rajone obuoliai buvo pirkti 15,6 proc. atvejų, antrame – 50,9 , trečiame – 33,5 proc. atvejų.

6.3.4. Specialistų atranka

Uždavinys 6.5. Pagal anglų kalbos žinių lygmenį reikia atrinkti specialistus dirbti užsienyje. Problemos sprendimo planas. Reikia:

1. Nagrinėti tik tuos pretendentus, kurių išsilavinimas, patirtis, karjera, asmeninės savybės atitinka šioms pareigoms keliamus reikalavimus.
2. Nustatyti pretendentų anglų kalbos žinių lygmenį kaip papildomą pirmojo punkto reikalavimą.
3. Apsispręsti, kaip tas lygmuo bus vertinamas.
4. Sudaryti pretendentų atrankos sprendimų medį.
5. Apskaičiuoti įvairių sprendimų variantų pasekmes.
6. Pagrįsti papildomos informacijos paieškos poreikį.
7. Pakoreguoti sprendimų priėmimo medį.
8. Padaryti išvadas ir pateikti rekomendacijas.

Reikiamas anglų kalbos žinių lygis priklauso nuo pareigybinių funkcijų, kurias turi vykdyti pretendentas. Išskiriami 3 lygmenys:

- pirmas – žemiausias,
- antras – vidutinis

• ir trečias – aukščiausias.

Pretendentai gali būti suskirstyti į tokias grupes:

• mokęsi anglų kalbos mokykloje ir tobulinęsi savarankiškai (1 strategija),

• lankę specialius kursus (2 strategija),

• turintys aukštąjį anglų filologijos išsilavinimą (3 strategija),

• dirbę (dirbantys) užsienyje (4 strategija).

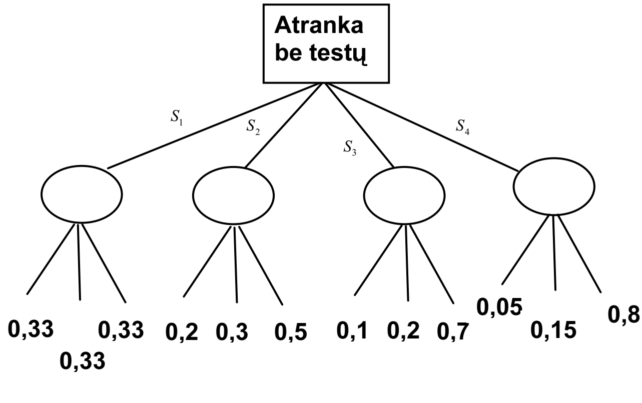
Numatomi tokie pretendentų atrankos atvejai:

1. kai pasitikima turimais duomenimis apie pretendentus;
2. kai pretendentai atrankos metu laiko vieną testą;
3. kai sėkmingai įveikę pirmąjį testą pretendentai laiko antrą testą ir t. t.

Sprendimų medžio diagrama be testavimo (1 atvejis) pateikta 5 pav.

Kai pretendentai pasirenkami iš pirmos grupės, nėra pagrindo juos skirstyti pagal anglų kalbos žinių lygius, nes mokykliniai pažymiai retai atitinka tikrovę, todėl teisingiausia manyti, kad visų pretendentų atitikmuo bet kokiam lygmeniui yra vienodas, t. y. bet kuris pretendentas gali būti su vienoda tikimybe priskirtas prie bet kurio žinių lygmens, vadinasi, hipotezių, kad pretendentas yra 1, 2, 3 lygmens, tikimybės yra 0,33 (tiksliau – 1/3).

Kai pretendentai atrenkami iš antros grupės, galima pasinaudoti anglų kalbos kursų organizatorių nuomonės apie juos baigusių klausytojų žinių lygius. Tarkime, gauta tokia informacija: pirmą žinių lygmenį atitinka 20 proc., antrą – 30 proc., trečią – 50 proc. baigusių kursus klausytojų.



5 pav. **Sprendimų medžio diagrama be testavimo (1 atvejis)**

Jei pretendentai atrenkami iš trečios grupės, galima pasinaudoti juos baigusių aukštųjų mokyklų sukauptais duomenimis. Tarkime, 10 proc. atitinka pirmą lygį, 20 proc. – antrą ir 70 proc. trečią žinių lygį.

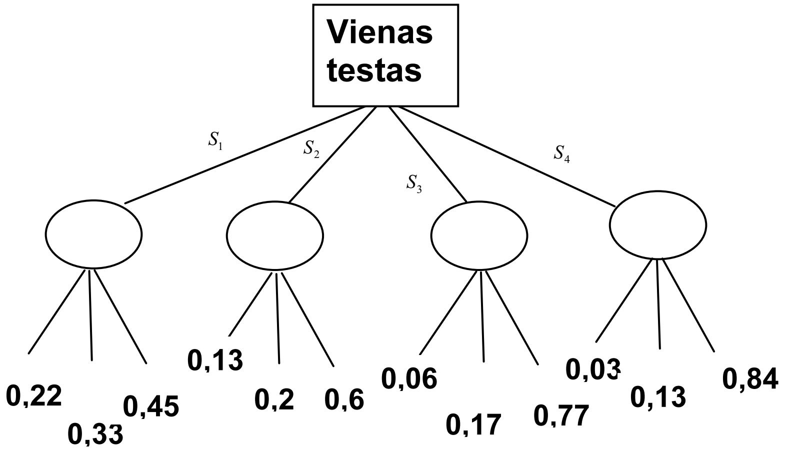
Jei pretendentai atrenkami iš 4 grupės, galima pasinaudoti atsiliepimais, gautais iš darboviečių užsienyje. Tarkime, surinkti tokie duomenys: 5 proc. atitinka pirmą lygį, 15 proc. – antrą ir 80 proc. – trečią žinių lygį.

Visi šie duomenys parodyti 5 pav. Akivaizdu, kad geriausias sprendimas – rinktis pretendentus, turinčius patirties dirbti užsienyje. Bet net ir tokiu atveju tik 80 proc. pretendentų atitinka norimą trečią anglų kalbos žinių lygmenį.

Sprendimo patikimumą galima pagerinti, jei visi pretendentai laiko trečio lygmens specialų anglų kalbos testą. Šiuo atveju sprendimų medžio diagrama būtų tokia, kaip pateikta 6 pav.

Norint kiekybiškai įvertinti visų variantų pasekmes, reikia nustatyti pradinius duomenis.

Tarkime, remiamės 5 pav. pateiktu atitinkamų grupių pretendentų pasiskirstymu pagal anglų kalbos žinių lygmenis. Tai yra atitinkamų hipotezių tikimybės: $P(H_1)$ – tikimybė – pretendentas atitinka pirmą lygmenį, $P(H_2)$ tikimybė – pretendentas atitinka antrą lygmenį, $P(H_3)$ – pretendentas atitinka trečią lygmenį. Taip pat žinoma, kad pirmą lygį atitinka kandidatai, kurie teisingai atsako į 40 proc. klausimų, antrą – į 60 proc., trečią – į 80 proc. klausimų, t. y. $P(A/H_1)$=0,4, $P(A/H_2)$=0,6, $P(A/H_3)$=0,8.



6 pav. **Sprendimų medžio diagrama, jei pretendentai laiko vieną testą**

1. Vertinami pirmos grupės pretendentai

Kadangi nėra jokių žinių apie tos grupės pretendentų žinių lygmenį, tikslinga manyti, kad jų priklausomybė bet kokiam lygmeniui yra vienoda, t. y.

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Taikydami (1) formulę nustatome, kad tikimybė, jog šis rezultatas atitinka pirmą lygį, yra:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\cdot 0{,}4}{\frac{1}{3}\cdot\left(0{,}4+0{,}6+0{,}8\right)} = 0{,}222\ ,$$

antrą lygį:

$$P(H_2/A) = \frac{\frac{1}{3}\cdot 0{,}6}{\frac{1}{3}\cdot\left(0{,}4+0{,}6+0{,}8\right)} = 0{,}333\ ,$$

trečią lygį:

$$P(H_3/A) = \frac{\frac{1}{3}\cdot 0{,}8}{\frac{1}{3}\cdot\left(0{,}4+0{,}6+0{,}8\right)} = 0{,}444\ .$$

Išvados:

1. Tikimybė, kad kandidato žinios atitinka pirmą lygį, yra 0,222, antrą lygį – 0,333, trečią lygį – 0,444.
2. Didžiausia yra tikimybė, jog pretendento žinios atitinka trečią lygį. Bet klausimas, ar šiuo atveju verta priimti kandidatą, nėra tikimybių teorijos problema.
3. Testas šiek tiek sumažino neapibrėžtumo situaciją: trečią lygmenį jau atitinka 44 proc. pretendentų, o buvo 33 proc.

2. Vertinami antros grupės pretendentai

Šiuo atveju atitinkamų hipotezių tikimybės: $P(H_1) = 0{,}2$ – tikimybė, kad pretendentas atitinka pirmą lygmenį, $P(H_2) = 0{,}3$ – tikimybė, kad pretendentas atitinka antrą lygmenį, $P(H_3) = 0{,}5$ – tikimybė, kad pretendentas atitinka trečią lygmenį. Sąlyginės tikimybės $P(A/H_i)$ nepasikeitė. Taikydami Bejeso formulę, randame:

$$P(H_1/A) = 0{,}13, \qquad P(H_2/A) = 0{,}27, \qquad P(H_3/A) = 0{,}6.$$

Išvados:

1. Reikiamą lygmenį atitinka jau 60 proc. kandidatų.
2. Svarbu, kad pastebimai sumažėjo atrenkamų pirmo – žemiausio – lygmens pretendentų procentas.

3. Vertinami trečios grupės pretendentai

Taikydami jau aprašytą metodiką, gauname tokias rekomendacijas:

$$P(H_1/A) = 0{,}06, \qquad P(H_2/A) = 0{,}17, \qquad P(H_3/A) = 0{,}77.$$

4. Vertinami ketvirtos grupės pretendentai

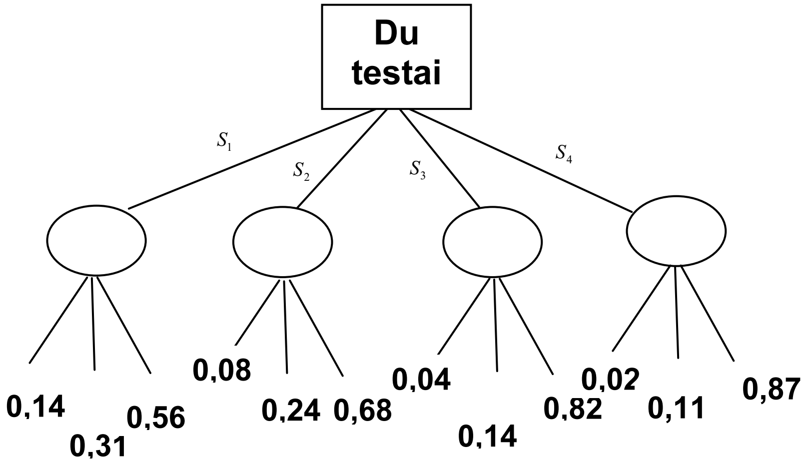
Taikydami jau aprašytą metodiką, gauname tokias rekomendacijas:

$$P(H_1/A) = 0{,}03, \qquad P(H_2/A) = 0{,}13, \qquad P(H_3/A) = 0{,}84.$$

Matome, kad testas sumažino klaidingų sprendinių priėmimo tikimybę ir palengvino sprendimo priėmimo procedūrą. Paliekame skaitytojui padaryti ir kitas išvadas.

Verta pasižiūrėti, kaip pasikeistų situacija, jei pirmąjį testą išlaikiusiems pretendentams būtų pateiktas antras trečio lygmens testas.

Sprendimų medžio diagrama pateikta 7 pav.



7 pav. **Sprendimų medžio diagrama kandidatams pateikus du testus**

Šiuo atveju hipotezių tikimybės, kad kiekvienos pretendentų grupės atstovai atitinka pirmą, antrą ir trečią lygmenis, turi būti susijusios su pirmojo testo rezultatais, t. y.

$$P_{j2}(H_i) = P_{j1}(H_i / A), \qquad (3)$$

čia $P_{j2}(H_i)$ – hipotezės su indeksu i patikslinta tikimybė, taikoma apskaičiuojant pretendentų atitikimo lygmenis po antrojo testo atrenkant išlaikiusius pirmąjį testą pretendentus iš j grupės;

$P_{j1}(H_i / A)$ – sąlyginė tikimybė, kad pirmąjį testą išlaikiusio pretendento žinios atitinka i lygmenį, jei jis priklauso j pretendentų grupei.

Formulės (3) taikymo pavyzdžiai: $P_{12}(H_3) = 0{,}56$, $P_{32}(H_2) = 0{,}14$.

Atlikę analogiškus skaičiavimus, aprašytus po pirmojo testo laikymo, gauname tokius rezultatus:

1. Kai išlaikiusieji pirmąjį testą pretendentai atrinkti iš pirmos grupės (detalus šio atvejo sprendimas nagrinėjamas uždavinyje 6.5):

$$P_{12}(H_1 / A) = 0{,}14, \qquad P_{12}(H_2 / A) = 0{,}31, \qquad P_{12}(H_3 / A) = 0{,}56.$$

2. Kai išlaikiusieji pirmąjį testą pretendentai atrinkti iš antros grupės:

$$P_{22}(H_1 / A) = 0{,}08, \qquad P_{22}(H_2 / A) = 0{,}24, \qquad P_{22}(H_3 / A) = 0{,}68.$$

3. Kai išlaikiusieji pirmąjį testą pretendentai atrinkti iš trečios grupės:

$$P_{32}(H_1 / A) = 0{,}04, \qquad P_{32}(H_2 / A) = 0{,}14, \qquad P_{32}(H_3 / A) = 0{,}82.$$

4. Kai išlaikiusieji pirmąjį testą pretendentai atrinkti iš ketvirtos grupės:

$$P_{42}(H_1 / A) = 0{,}02, \qquad P_{42}(H_2 / A) = 0{,}11, \qquad P_{42}(H_3 / A) = 0{,}87.$$

Šie duomenys surašyti 7 pav. apačioje.

Išvados:

1. Antras testas, palyginus su pirmuoju, beveik du kartus sumažina tikimybę atrinkti pretendentus, atitinkančius žemiausią žinių lygmenį.

2. Antras testas, palyginus su pirmuoju, beveik nekeičia tikimybių atrinkti antrojo lygmens kandidatus.

3. Antras testas, palyginus su pirmuoju, pastebimai padidina tikimybę atrinkti tinkamus specialistus iš pirmos pretendentų grupės (prieaugis 24 proc.), tik 10 proc. iš antros ir trečios grupių ir vos 4 proc. iš ketvirtos grupės. Vadinasi, antrą testą tikslinga teikti tik pirmos grupės pretendentams.

4. Apskritai matyti, kad testų vaidmuo nėra toks didelis, kokio buvo galima tikėtis. Vadinasi, pirmą testą išlaikiusius pretendentus patartina tikrinti kitaip, pvz., organizavus pokalbius.

5–7 pav. pateiktos šio uždavinio sprendimų medžio diagramos yra suskirstytos į dalis.

Iš tikrųjų jas reikėtų sujungti. Gautume gana gremėzdišką sprendimų medį, tačiau būtų matomi visi galimi sprendimų variantai ir jų pasekmės. Siūlome skaitytojui savarankiškai atlikti tokį darbą.

Priimant šį sprendimą tikslinga vadovautis papildomu kriterijumi – pretendento lygio vidurkiu, kuris gali būti apskaičiuojamas taip.

Pažymime pretendento anglų kalbos žinių lygį raide L. Jis gali turėti tris reikšmes:

$L_1 = 1$, $L_2 = 2$ ir $L_3 = 3$. Jei pretendento pasirengimo lygis nėra žinomas ir nustatomas patikrinus testo rezultatus, tai galima tvirtinti, kad L yra atsitiktinis dydis, kurio vidurkis apskaičiuojamas taikant žinomą formulę. Tada pretendento žinių vidurkis

$$M[L] = \sum_{i=1}^{3} L_i P(H_i / A) = 1 \cdot 0{,}222 + 2 \cdot 0{,}333 + 3 \cdot 0{,}444 = 2{,}22\,,$$

t. y. jis tik šiek tiek pranoksta antrą pretendento pasirengimo lygį. Jei sprendimas priimamas tik remiantis vieno testo rezultatais, pretendentas neatitinka keliamų anglų kalbos žinių reikalavimų.

Informacijos stoka negali būti papildyta jokiais matematiniais metodais. Todėl šiuo atveju būtų tikslinga kandidatui pasiūlyti dar vieną to paties lygio testą. Pažiūrėkime, kaip tai galėtų paveikti sprendimą dėl kandidato priėmimo.

Kitu atveju pretendento, jei jis priklauso ketvirtai grupei ir išlaikė du testus, anglų kalbos žinių vidurkis būtų toks:

$$M[L] = \sum_{i=1}^{3} L_i P(H_i / A) = 1 \cdot 0{,}02 + 2 \cdot 0{,}11 + 3 \cdot 0{,}87 = 2{,}85.$$

Vadovaujantis šiuo kriterijum, galima drąsiai tvirtinti, kad pretendentas atitinka aukščiausią trečiąjį anglų kalbos žinių lygmenį.

Išspręsti uždaviniai atskleidė Bejeso formulės galimybes taikyti ją priimant mokymo, kontrolės ir kitus sprendimus. Tai labai svarbi šios formulės savybė ir ja tikslinga naudotis kuo plačiau, nes taip gaunami kiekybiniai įvertinimai vietoj kokybinių arba loginių samprotavimų.

6.4. Uždavinių sprendimas Excel aplinkoje

Kuo sudėtingesnis nagrinėjamas procesas, tuo didesnis indėlis gali būti įgyvendintas taikant sprendimų medžio diagramas.

Metodų įvairovė, taikoma kuriant sprendimų medžio diagramas, itin plati, todėl nėra galimybės ją išnagrinėti neatsižvelgus į konkrečią situaciją. Vis dėlto yra vienas metodas, kuris gali būti dažniausiai taikomas. Tai jau minėta vadinamoji Bejeso formulė, sukurta tikimybių teorijoje ir jau taikyta šiame modulyje. Atsižvelgiant į jos svarbą, verta dar kartą apie ją pakalbėti.

Bejeso formulės esmė yra tokia.

Tarkime, galimų situacijų visuma, kurioje gali įvykti mus dominantis įvykis, suskirstyta į tam tikras neturinčias bendrų elementų grupes, vadinamas hipotezėmis, $H_1, H_2, ..., H_n$. Žinomos tų grupių situacijų arba hipotezių pasirodymo tikimybės $P(H_i),\ i = 1, 2,\ ..., n$. Dominantis įvykis gali pasirodyti kiekvienoje iš tų grupių. Remiantis statistiniais duomenimis ar kitais šaltiniais nustatytos tikimybės, kad įvyks įvykis A, jei susidarys konkreti situacija, siejama su konkrečia hipoteze – $P(A/H_i)$.

Ši informacija žinoma iki eksperimento.

Atliktas eksperimentas, kurio metu įvyko įvykis A, tačiau nežinoma susidariusi situacija arba pasirodžiusi hipotezė, susijusi su šiuo konkrečiu įvykiu. Norima sužinoti, kokios yra tikimybės, kad šis įvykis atsitiko susidarius konkrečioms aprašytoms situacijų grupėms, t. y. tikimybės $P(H_i / A)$, kurios gali būti suvokiamos kaip patikslintos hipotezių tikimybės. Jos apskaičiuojamos pagal Bejeso formulę

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) * P(A / H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) * P(A / H_i)}, i = 1, 2, ..., n.$$

Skaičiuoti pagal šią formulę Excel aplinkoje visai paprasta.

Tarkime, langeliuose C2, D2, … surašome hipotezių tikimybes $P(H_i),\ i = 1,\ 2,\ ...,\ n$, langeliuose C3, D3, ... – sąlygines tikimybes $P(A / H_i)$, langeliuose C4, D4, ... formulės skaitiklio sandaugų reikšmes, langelyje, pvz., B2 – vardiklio reikšmę, langeliuose C5, D5, ... apskaičiuojame ieškomas tikimybes, kad, įvykus įvykiui A, susidarė konkreti situacija.

Išspręskime uždavinį 6.4 kompiuteriu

*Sprendimas***.**

Įjungiame Excel programą, langeliuose C2, D2, E2 surenkame 0,333.

Langeliuose C3, D3, E3 atitinkamai surenkame reikšmes 0,4; 0,6; 0,8.

Langelyje C4 surenkame =c2*c3, D4 surenkame =d2*d3, E4 surenkame =e2*e4, B2 surenkame =c4+d4+e4.

Langeliuose C5 surenkame = c4/b2, D5 surenkame =d4/b2, E5 surenkame =e4/b2. Tai ieškomos tikimybės: 0,222; 0,333; 0,444.

Išvados:

1. Tikimybė, kad pretendento žinios atitinka pirmąjį lygį, yra 0,222, antrąjį lygį – 0,333, trečiąjį lygį – 0,444.

2. Vadinasi, tik 44 proc. atvejų ekspertas gali tikėtis, kad atrinko tinkamus specialistus. Tai itin silpna paguoda.

Ką daryti?

Galimi keli variantai.

Pirma, galbūt galima iki egzamino nustatyti pretendentų pasirengimo lygį. Tarkime, tokia galimybė yra, ir laikančiųjų egzaminą pretendentų proporcijos yra žinomos: 85 proc. atitinka trečiąjį lygį, 10 proc. – antrąjį ir 5 proc. trečiąjį lygį. Tada hipotezių tikimybės būtų atitinkamai 0,85; 0,1 ir 0,05. Suvedę šiuos duomenis į parengtą programą, matome, kad tik apie 3 proc. atrinktų pretendentų yra pirmo lygio, apie 8 proc. antro, o beveik 90 proc. yra tinkami specialistai.

Toks sprendimas jau gali tenkinti ekspertą.

Antra, jei pretendentų pasiskirstymas žinių lygio atžvilgiu nėra žinomas arba jei turima informacija negalima pasitikėti, išlaikiusiems pirmą egzaminą galima pateikti tokio pat lygmens antrą testą (uždavinys 6.5) ir įvertinti aposteriorines pretendentų žinių lygio tikimybes. Šiuo atveju apriorinės pretendentų žinių tikimybės yra 0,222; 0,333; 0,444.

Suvedę šiuos duomenis į parengtą programą, matome, kad sėkmingai net du kartus iš eilės pateiktus testus gali išlaikyti 14 proc. pirmo lygio grupės ir 31 proc. antro lygio grupės pretendentų.

Trečią kartą egzaminuodami jau du kartus išlaikiusius egzaminą pretendentus, matome, kad neatitinkančių reikalavimus pretendentų procentas yra dar gana didelis – 34 proc., t. y. kas trečias atrinktas pretendentas būtų neatitikęs keliamų reikalavimų.

Keisdami pradžios duomenis, galime pasirinkti tinkamą pretendentų atrankos scenarijų. Visi vertinimai atliekami itin lengvai, pasinaudojus vieną kartą sukurtu algoritmu.

Savitikros užduotys

1. Teoriniai klausimai:

1.1. Apibūdinkite sprendimų medžio esmę.
1.2. Kokie yra pagrindiniai sprendimų medžio diagramos elementai?
1.3. Kokia yra sprendimų medžio sudarymo tvarka?
1.4. Kaip galima sumažinti situacijos neapibrėžtumą?
1.5. Kokias žinote papildomų duomenų panaudojimo procedūras?
1.6. Paaiškinkite eksperto kvalifikacijos nustatymo esmę.
1.7. Kokia yra Bejeso formulės taikymo prasmė?
1.8. Kuo skiriasi informacija, susijusi su praeitimi (apriorinė informacija), nuo informacijos, skirtos prognozuoti?

2. Praktinės užduotys:

2.1. Išspręskite šiuos uždavinius:

Ekspertai, norėdami įvertinti studentų žinių lygį, atsitiktiniu būdu pasirenka vieną iš penkių grupių ir apklausia 5 studentus. Studentų žinių lygis pateiktas lentelėje.

11 lentelė. **Studentų grupių charakteristika**

Studentų grupė	**Studentų skaičius**	**Studentų skaičius, įvertintas balais**						
		10	**9**	**8**	**7**	**6**	**5**	**4**
1	20	3	5	4	3	3	2	0
2	22	1	4	10	3	2	1	1
3	18	2	3	5	1	4	2	1
4	24	5	4	4	4	3	2	2
5	25	2	1	3	10	4	2	3

Tarkime, kad studentų žinių lygis apklausos metu patvirtinamas. Visi atrinkti studentai gavo ne mažiau kaip 8 balus.

Reikia apskaičiuoti tikimybes, kad šie studentai buvo atrinkti iš pirmos, antros, trečios, ketvirtos ir penktos grupių.

2.2. Pagal 2.1 uždavinio sąlygas reikia apskaičiuoti tikimybes, kad šie penki studentai buvo atrinkti iš pirmos, antros, trečios, ketvirtos arba penktos grupių, jei jų žinios buvo įvertintos: a) 7, 8 ir 9 balais, b) 5, 6 ir 7 balais.

2.3. Konkurso tvarka reikia atrinkti pretendentus eiti atsakingas pareigas institucijoje.

Tuo tikslu parengtas kvalifikacinis testas.

Konkurso komisija, išnagrinėjusi pretendentų asmens bylas, mano, kad tik 20 proc. iš jų atitinka keliamus reikalavimus.

Žinoma, kad 90 proc. pretendentų, atitinkančių keliamus reikalavimus, testo užduotis atlieka sėkmingai, o 10 proc. sutrinka ir neišlaiko.

Žinoma ir tai, kad 30 proc. pretendentų, neatitinkančių keliamų reikalavimų, vis dėlto užduotis atlieka sėkmingai.

Kokia yra tikimybė, kad dalis išlaikiusiųjų neatitinka keliamų reikalavimų?

Reikia padaryti išvadas.

Atsakymas

Tikimybė, kad neatitinkantis reikalavimų pretendentas sėkmingai išlaikys testą, yra **0,57**.

2.4. Esant teisingoms 2.3 uždavinio sąlygoms, pagal pirmojo testo rezultatus atrinkti pretendentai kviečiami dalyvauti antrame atrankos ture.

Kokia yra tikimybė, kad išlaikiusieji pirmąjį testą antrajame ture neatitiks keliamų reikalavimų?

Reikia padaryti išvadas.

Atsakymas

Tikimybė, kad neatitinantis reikalavimų pretendentas sėkmingai išlaikys antro turo testą, yra **0,31.**

PABAIGA

Šiame vadovėlyje išnagrinėti svarbiausi operacijų tyrimų metodai, padedantys visų lygmenų vadovams ir kitiems specialistams išnagrinėti sudėtingas situacijas, atrinkti kiekybinius metodus, kurie gali padėti pagrįsti priimamus sprendimus.

Daug dėmesio skiriama uždavinių formulavimui, nes tai sudėtingiausias darbas, kurį gali atlikti tik specialistas, puikiai išmanantis nagrinėjamos problemos esmę ir suvokiantis kiekybinių metodų galimybes.

Medžiaga išdėstyta suprantamai, pradedant konkrečiais pavyzdžiais, todėl turėtų padėti visiems norintiems pasinaudoti nagrinėjamų metodų galimybėmis. Kiekvienas uždavinys smulkiai analizuojamas, formalizuojamas ir sprendžiamas. Ypač dėmesingai išdėstytas uždavinių sprendimas kompiuteriu. Smulkiai aprašytos visos procedūros, kurias reikia atlikti, norint gauti sprendinius. Pasiūlyta daug papildomų užduočių, kurios turi padėti dirbti visomis parengtomis kompiuterinėmis programomis.

Visi uždaviniai išspręsti, todėl klausytojai, studentai, specialistai, vadovai, norintys įvaldyti šiuos metodus, turi galimybę tai padaryti.

Norisi pabrėžti, kad kiekybinių metodų svarba nuolat didėja. Tai suvokia net politikai. Itin plačiai kiekybiniai metodai taikomi Jungtinėse Valstijose, daugelio kitų Vakarų valstybių privačiame ir viešajame sektoriuose.

Nors kiekybiniai metodai svarbūs, nėra daug literatūros, skirtos ne matematikams, o specialistams praktikams, kurioje būtų nagrinėjami tų metodų prasminiai ir kokybiniai aspektai. Autorius tikisi, kad šis vadovėlis, kurio turinys aprobuotas dėstant šiuos metodus įvairiose Lietuvos aukštosiose mokyklose jau daugiau kaip 10 metų, padidins vadovų ir specialistų, kurie sugeba pagrįstai taikyti kiekvieną iš jų, skaičių ir, svarbiausia, padės suvokti, kokie kokybiniai sprendimai išplaukia iš atliktų vertinimų, analizės ir galimybių.

Sukurta daug kompiuterinių programų, padedančių apdoroti duomenis ir formuluoti pagrįstas išvadas. Dažnai pasigendama aiškumo, kaip panaudoti tas galimybes, kokios išvados yra patikimos ir kaip galima apskaičiuoti to patikimumo ir tikslumo lygmenis. Šiame vadovėlyje nagrinėjama tik dalis svarbių informacijos apdorojimo ir išvadų formulavimo metodų, tačiau perpratus šiuos metodus lengviau suvokti kitus bendruosius informacijos apdorojimo klausimus.

Literatūra

1. *Puškorius, S. Sprendimų priėmimo teorija. Kiekybiniai metodai: vadovėlis: Vilnius: Lietuvos teisės universiteto Leidybos centras, 2001.*
2. *Puškorius, S. Matematiniai metodai vadyboje: vadovėlis: Vilnius: TEV, 2001.*
3. *Cooke, R. M. Experts in Uncertainty. Expert Opinion and Subjective Probability in Science. Delft University of Technology. May 1990.*
4. *Gordon, G.; Pressman, J.; Cohn S. Quantitave Decision Making for Business. N.Y.: Englewood Cliffs, 1990.*
5. *Guttman L. An Outline of the Statistical Theory of Prediction. In the Pediction of Personal Adjustment. Ed. Paul Horst. New York. Social Science Research Council, 1941.*
6. *Turban, E.; Meredith, J. R. Fundamentals of Management Science. Fifth Edition. IRWIN: Homewood IL 60430, Boston, 1991.*
7. *Lotfi, V.; Pegels C. C. Decision Support Systems for Management Science/ Operations research. IRWIN: Homewood, IL 60430, Boston, 1989.*
8. *Bazerman, M. H. Judgement in Managerial Decision making (2^{d} ed.). N.Y.: John Wiley and Sons, 1990.*
9. *Вагнер, Г. Основы исследовавания операций.* Москва: *Мир, Т. 1–3, 1972, 1973.*
10. *Вентцель, Е. С. Исследование операций.* Москва: *Советское радио, 2003.*

Puškorius, Stasys
Pu92 Sprendimų priėmimo teorija. Operacijų tyrimų metodai: vadovėlis. – Vilnius: Mykolo Romerio universiteto Leidybos centras, 2009. – 204 p., iliustr.
Bibliogr.: 203 p.
ISBN 978-9955-19-136-0

Vadovėlyje nagrinėjami šeši operacijų tyrimo metodai: tiesinis programavimas, diskretusis programavimas, tinklinis planavimas, masinio aptarnavimo sistemos, lošimų teorijos metodai ir sprendimų medžiai. Kiekvienas iš šių metodų aprašomas taip, kad jį galėtų suprasti ir taikyti studentai, vadovai ir kiti specialistai, kurie domisi operacijų tyrimų metodų galimybėmis grindžiant priimamus sprendimus.

Medžiaga išdėstyta itin paprastai, kad ją galėtų suprasti ir tie skaitytojai, kurie neturi specialaus matematinio išsilavinimo. Kiekviena tema nagrinėjama pasitelkus konkrečius pavyzdžius, parodoma, kaip galima formalizuoti skirtingas užduotis, kokiais metodais jas galima spręsti, kokios išvados išplaukia.

Vadovėlyje siūloma uždavinius spręsti pasitelkus kompiuterines programas, kurios leidžia daugiausia dėmesio skirti ne skaičiavimams, o gautų rezultatų analizei keičiant pradinius duomenis. Tai ženkliai išplečia šių metodų taikymo sritis, įgalina palyginti skirtingus sprendimų variantus ir priimti pagrįstus sprendimus.

Autorius tikisi, kad šis vadovėlis bus naudingas visiems, kas domisi operacijų tyrimų metodais.

UDK 519.8(075.8)

Stasys Puškorius
SPRENDIMŲ PRIĖMIMO TEORIJA.
OPERACIJŲ TYRIMŲ METODAI
Vadovėlis

Redaktorė *Vesta Adomaitienė*
Viršelio dailininkė *Stanislava Narkevičiūtė*
Maketavo *Janė Andriuškevičienė*

SL 585. 2009 08 13. 12,29 leidyb. apsk. l.
Tiražas 500 egz. Užsakymas
Išleido Mykolo Romerio universiteto Leidybos centras, Ateities g. 20, LT-08303 Vilnius
El. paštas leidyba@mruni.eu
Puslapis internete www.mruni.eu
Spausdino UAB „Baltijos kopija“, Kareivių g. 13b, LT-09109 Vilnius
Puslapis internete www.kopija.lt
El. paštas info@kopija.lt